

# Vorwort

Dieses Lehrbuch ist eine Einführung in die Theorie der Martingale und Irrfahrten (*random walk*) in diskreter Zeit. Es richtet sich an Studierende der Mathematik und Physik ab dem zweiten Studienjahr. Mein Ziel ist es, in kompakter und eingängiger Weise zentrale Techniken und Resultate der Stochastik darzustellen und so eine Grundlage für weiterführende Vorlesungen zu geben.

Der Text folgt meinen Vorlesungen an der TU Dresden, er kann als Grundlage oder Begleittext für eine Vorlesung aber auch zum Selbststudium verwendet werden. Voraussetzung für das Verständnis des vorliegenden Bandes sind Grundlagen der Maß- & Integrationstheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie ich sie in den ersten beiden Bänden dieser Reihe entwickelt habe. Relevant sind vor allem Kapitel 1–16 aus *Maß und Integral* und Kapitel 1–7 & 9 aus *Wahrscheinlichkeit*. Diese Bände werden im Text als MI und WT zitiert, zahlreiche Querverweise auf die entsprechenden Sätze vereinfachen die Lektüre.

In Kapitel 1–7 und 9 werden die Grundlagen der Theorie der diskreten Martingale entwickelt, die dann in Kapitel 8 auf klassische Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie (Null-Eins-Gesetze, Summen von unabhängigen Zufallsvariablen, zentraler Grenzwertsatz) mit Martingalmethoden bewiesen und für Folgen von Martingaldifferenzen erweitert. Zusammen mit WT Kapitel 1–7, 9 kann man so eine Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie auf der Grundlage von Martingalen geben. Diesem Teil schließt sich das Studium zufälliger Irrfahrten (*random walks*) an, das exemplarisch in die Gedankenwelt von zeitdiskreten stochastischen Prozessen einführt. Der Schwerpunkt liegt auf der Untersuchung von Rekurrenz und Transienz sowie dem Zusammenhang mit (diskreten) Randwertproblemen.

Die Auswahl der Themen und Techniken ist natürlich subjektiv, dennoch will ich dem Leser ein breites Spektrum von klassischen und modernen Methoden vorstellen, das auf eine weitere Spezialisierung optimal vorbereitet. Dabei war mein Leitmotiv die Frage „Was wird später im Studium und in Anwendungen wirklich benötigt“, wobei meine eigenen Forschungsinteressen – die Theorie der stochastischen Prozesse – im Vordergrund stehen.

Für das tiefere Verständnis ist es wichtig, dass der Leser sich mit der Materie selbständig auseinandersetzt. Zum einen sind dafür die Übungsaufgaben gedacht (vollständige Lösungen gibt es unter [www.motapa.de/maps](http://www.motapa.de/maps)), andererseits weise ich im laufenden Text mit dem Symbol [!] auf (bisweilen nicht ganz so offensichtliche) Lücken hin, die der Leser selbst ausfüllen sollte. Auf

- 
- ▶ wichtige Schreibweisen,
  - ▶ Gegenbeispiele,
  - ▶ typische Fallen und versteckte Schwierigkeiten



---

wird durch derart markierte Absätze aufmerksam gemacht.

Vom Umfang entsprechen die Kapitel 1–7 & 9, abgerundet um einige Wahlthemen, einer dreistündigen Vorlesung; etwa 4–5 Textseiten können in einer Vorlesungsdoppelstunde durchgenommen werden. Die mit dem Symbol  $\blacklozenge$  gekennzeichneten Abschnitte sind als Ergänzung gedacht und können je nach Zeit und Zielsetzung ausgewählt werden. Sie sind auch als Themen für ein Seminar geeignet. Eine Übersicht über die Abhängigkeit der einzelnen Kapitel findet sich auf Seite VII.

Dieser Text ist aus Vorlesungen entstanden, und ich danke meinen Studenten, Schülern und Kollegen für ihr Interesse und ihre Mitarbeit. Ich danke ganz besonders Dr. Wojciech Cygan, Dr. Victoria Knopova und Dr. Franziska Kühn für die genaue Durchsicht des Texts und ihre kritischen und hilfreichen Kommentare. Herr Dr. Böttcher hat in bewährter Weise die Grafiken erstellt und das Kapitel zur Kopplung gelesen. Herrn Prof. Jacob danke ich für zahlreiche Diskussionen und die Möglichkeit, seine Privatbibliothek zu nutzen.

Die Zusammenarbeit mit dem Verlag de Gruyter, allen voran Frau Schedensack und Herr Lindenhain, war wieder sehr angenehm und hat wesentlich zum Gelingen dieses Buchs beigetragen. Meine Frau machte es möglich, dass ich „ungezügelt“ an den Martingalen arbeiten konnte – danke!

Dresden, Februar 2018

René L. Schilling

## Mathematische Grundlagen, weiterführende Literatur

Für die Lektüre dieses Texts werden Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie und der Wahrscheinlichkeitstheorie benötigt, etwa im Umfang der Kapitel 1–16 meines Lehrbuchs *Maß und Integral* und Kapitel 1–7 und 9 meines Lehrbuchs *Wahrscheinlichkeit*. Beide Bände sind in gleicher Ausstattung wie dieses Buch beim Verlag de Gruyter erschienen.

### Grundlagen

Schilling, R.L.: *Maß und Integral*. De Gruyter, Berlin 2015 (zitiert als MI).

Schilling, R.L.: *Measures, Integrals and Martingales*. Cambridge University Press, Cambridge <sup>2</sup>2017 (zitiert als MIMS).

Schilling, R.L.: *Wahrscheinlichkeit*. De Gruyter, Berlin 2017 (zitiert als WT).

Georgii, H.-O.: *Stochastik. Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. De Gruyter, Berlin <sup>4</sup>2009.

Krengel, U.: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Vieweg, Wiesbaden <sup>8</sup>2007.

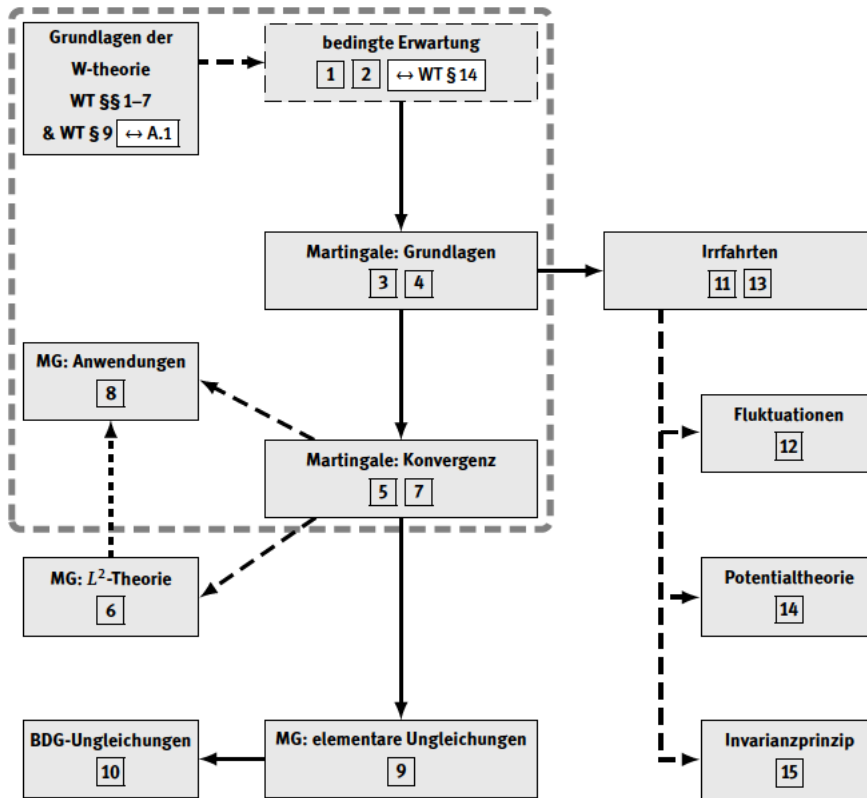
## Weiterführende Literatur

Khoshnevisan, D., Schilling, R.L.: *From Lévy-Type Processes to Parabolic SPDEs*. Birkhäuser, Cham 2016.

Norris, J.: *Markov Chains*. Cambridge University Press, Cambridge 1997.

Schilling, R.L., Partzsch, L.: *Brownian Motion. An Introduction to Stochastic Processes*. De Gruyter, Berlin <sup>2</sup>2014.

## Abhängigkeit der einzelnen Kapitel



**Abb. 1:** Die Grafik zeigt die Abhängigkeit der Themen dieses Buchs, gestrichelte Pfeile stehen für kleinere oder indirekte Abhängigkeiten; „↔ WT  $n$ “ bedeutet, dass das entsprechende Kapitel durch Kapitel  $n$  meines Lehrbuchs „Wahrscheinlichkeit“ (WT) ersetzt werden kann. Vorkenntnisse aus der Wahrscheinlichkeitstheorie werden etwa im Umfang der Kapitel WT 1–7 vorausgesetzt, eine knappe Übersicht über die Konvergenzarten der Wahrscheinlichkeitstheorie (vgl. WT Kapitel 9) wird im Anhang A.1 & A.2 gegeben. Die mit der gestrichelten Linie zusammengefassten Kapitel sind eine „Einführung in die Stochastik“ mit Martingalmethoden, die den klassischen Zugang (WT Kapitel 8–13) ersetzen können.