Martingale und Prozesse
de Gruyter Lehrbuch, Berlin 2018
ISBN: 978–3–11–035067-8

Lösungshandbuch

René L. Schilling

Dresden, Mai 2018

Dank. Ich bedanke mich bei Frau Dr. Franziska Kühn und Herrn Dr. Björn Böttcher, die viele der Aufgaben und Lösungen beigesteuert haben. Ich danke Frau Dr. Viktoria Knopova und Herrn Dr. Wojcziech Cygan für die Mithilfe an diesem Handbuch, für viele hilfreiche Hinweise und sorgsames Korrekturlesen.

Dresden, Mai 2018 René Schilling

Contents

1 Fair Play

Aufgabe 1.1. Lösung: Wir schreiben $\vec{R} = (R_1, \dots, R_{n-1})^\top$ und $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})^\top$. OE sei $R_0 = 0$. Nach Definition gilt $R_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} e_i \xi_i$, $k = 2, \dots, n$, d.h.

$$\vec{R} = M\vec{\xi} \quad \text{und} \quad M = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & \dots & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_{n-1} \end{pmatrix}$$

Andererseits gilt $R_k - R_{k-1} = (\sum_1^{k-1} - \sum_1^{k-2}) e_i \xi_i = e_{k-1} \xi_{k-1}$, also

$$\vec{\xi} = M^{-1}\vec{R} \quad \text{und} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} e_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -e_2^{-1} & e_2^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -e_3^{-1} & e_3{}^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -e_{n-1}^{-1} & e_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Matrizen M und M^{-1} kann man nun die x_i aus den r_i und umgekehrt gewinnen.

■■

2 Bedingte Erwartung

Aufgabe 2.1. Lösung:

(a) Wir wissen bereits, dass $(X, Z) \mapsto \mathbb{E}(XZ)$ ein Skalarprodukt in $L^2(\mathbb{P})$ ist. Für $X \in L_0^2(\mathbb{P})$ haben wir

$$\operatorname{Cov}(X, Z) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Z - \mathbb{E}Z)] = \mathbb{E}(XZ),$$

d.h. die Kovarianz ist tatsächlich das Skalarprodukt in diesem Raum der zentrierten ZV.

Wir müssen noch die Abgeschlossenheit von L_0^2 zeigen. Dazu sei $(X_n)_n \subset L_0^2$ eine Cauchy-Folge in L_0^2. Da die Normen von L^2 und L_0^2 auf L_0^2 übereinstimmen, ist $(X_n)_n$ also auch eine L^2-Cauchy-Folge und daher existiert ein $X \in L^2$ mit $\lim_n \|X - X_n\|_{L^2} = 0$. Wir brauchen noch, dass $\mathbb{E}X = 0$. Das geht so:

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}X - \mathbb{E}X_n| &\underset{\text{ungleichung}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{\leqslant}} \mathbb{E}|X - X_n| \\
&= \mathbb{E}\left(|X - X_n| \cdot 1\right) \\
&\underset{\text{Schwarz}}{\overset{\text{Cauchy-}}{\leqslant}} \sqrt{\mathbb{E}\left(|X - X_n|^2\right)}\sqrt{\mathbb{E}\left(1^2\right)} \\
&= \|X_n - X\|_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Also gilt $\mathbb{E}X = \lim_n \mathbb{E}X_n = \lim_n 0 = 0$.

(b) Weil $\mathbb{V}X = \|X\|^2 = \mathbb{E}(X^2)$ das Quadrat der Norm ist, ist die behauptete Gleichheit einfach das Ausmultiplizieren des Skalarprodukts:

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_i X_i, \sum_k X_k \right\rangle &= \mathbb{E}\left(\sum_i X_i \sum_k X_k\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i,k} X_i X_k\right) = \sum_{i,k} \mathbb{E}\left(X_i X_k\right) \\
&= \sum_i \mathbb{E}\left(X_i X_i\right) + \sum_{i \neq k} \mathbb{E}\left(X_i X_k\right) = \sum_i \mathbb{E}\left(X_i^2\right) + 2 \sum_{i<k} \mathbb{E}\left(X_i X_k\right).
\end{aligned}$$

(c) Weil $\sqrt{\mathbb{V}X} = \|X\|$ in L_0^2 gilt, handelt es sich bei der Behauptung einfach um die Dreiecksungleichung (Minkowski-Ungleichung) für die Norm. Für die ist bekannt, dass Gleichheit genau dann auftritt, wenn die Vektoren $X_1, \ldots, X_n$ kollinear sind, d.h. sich um einen skalaren Proportionalitätsfaktor voneinender unterscheiden.

■■

Aufgabe 2.2. Lösung: **Lösung 1.** Die bedingte Erwartung ist eine orthogonale Projektion (vgl. Satz 2.5) und als solche ist sie eine Kontraktion.

Lösung 2. Wir verwenden bJensen (Satz 2.7.d) und erhalten

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2 \mid \mathscr{F}) \\ \Longrightarrow\ &\|\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})\|_{L^2}^2 = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})^2\big] \leqslant \mathbb{E}\big[\mathbb{E}(X^2 \mid \mathscr{F})\big] = \mathbb{E}\big[X^2\big] = \|X\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3. Lösung: Wir zeigen sogar, dass die Abbildung Lipschitzstegig ist. Das folgt aus der Dreiecksungleichung von unten:

$$\big|\|X\| - \|Y\|\big| \leqslant \|X - Y\|.$$

Bitte machen Sie sich klar, wie man diese Dreiecksungleichung nach unten zeigt:

$$\|X\| = \|X - Y + Y\| \leqslant \|X - Y\| + \|Y\| \implies \|X\| - \|Y\| \leqslant \|X - Y\|;$$

nun tauschen wir die Rollen von X und Y...

Aufgabe 2.4. Lösung: Zunächst erinnern wir uns daran, dass $\mathscr{F} := \sigma(\{A\}) = \{\varnothing, A, A^c, \Omega\}$ ist. Eine Funktion X ist $\mathscr{F}$-messbar, wenn $\{X \leqslant \lambda\} \in \mathscr{F}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, d.h. es ist klar, dass eine $\mathscr{F}$-messbare Funktion eine Treppenfunktion mit Treppenstufen aus $\mathscr{F}$ sein muß. Um Trivialitäten auszuschließen nehmen wir zudem an, dass $0 < \mathbb{P}(A) < 1$ gelten soll. Mithin haben wir

$$X = a\mathbb{1}_A + b\mathbb{1}_{A^c} + c\mathbb{1}_{\varnothing} + d\mathbb{1}_{\Omega} = (a+d)\mathbb{1}_A + (b+d)\mathbb{1}_{A^c}.$$

OE können wir also $d = 0$ annehemn, da a, b beliebig sind. Die L^2-Bedingung ist dann

$$\infty > \mathbb{E}(X^2) = a^2 + b^2$$

stets erfüllt.

Für eine diskrete ZV X gilt $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ und $\sigma(X) = \sigma(\{X_i = x_i\}, i = 1, \dots, n, \dots)$. Die Überlegung von oben zeigt, dass eine $\sigma(X)$-mb. Funktion von der Form

$$Y = \sum_i y_i \mathbb{1}_{\{X = x_i\}} = \sum_i y_i \mathbb{1}_{\{x_i\}}(X)$$

sein muß und die Integrabilitätsbedingung ist dann $\mathbb{E}Y^2 = \sum_i y_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) < \infty$.

Aufgabe 2.5. Lösung:

(a) Die Mengen $\{Z_1 = t_1, \dots, Z_n = t_n\} = \bigcap_{i=1}^n \{Z_i = t_i\}$ partitionieren Ω wenn die t_i die Wertebereiche der ZV Z_i durchlaufen. Offensichtlich sind diese Mengen disjunkt, d.h. das Argument aus Beispiel 2.3 liefert sofort die Behauptung.

(b) OE sei $n = 1$ (sonst argumentieren wir mit Vektoren). Wir definieren $f(t) := \mathbb{E}(X \mid \{Z = t\})$. Aus Beispiel 2.3 wissen wir bereits

$$\mathbb{E}(X \mid Z) = \sum_{t \in Z(\Omega)} \mathbb{E}(X \mid \{Z = t\}) \mathbb{1}_{\{Z=t\}} = \sum_{t \in Z(\Omega)} f(t) \mathbb{1}_{\{t\}}(Z) = f(Z)$$

d.h. $f(Z)$ ist ein Kandidat für die Darstellung von $\mathbb{E}(X \mid Z)$ als Funktion von Z, d.h. $f(Z) = \phi(Z)$ und damit $\phi(t) = \mathbb{E}(X \mid \{Z = t\})$.

■■

Aufgabe 2.6. Lösung: Achtung: Fehler in Angabe! Es muss gelten: $F \in \mathscr{F}$ und $\omega \in F$ Nach Voraussetzung gilt $X\mathbb{1}_F = Y\mathbb{1}_F$ und mit einem pull-out Argument folgt

$$\mathbb{1}_F \cdot \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) \overset{\text{pull out}}{=} \mathbb{E}(X\mathbb{1}_F \mid \mathscr{F}) \overset{X\mathbb{1}_F = Y\mathbb{1}_F}{=} \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_F \mid \mathscr{F}) \overset{\text{pull out}}{=} \mathbb{1}_F \cdot \mathbb{E}(Y \mid \mathscr{F}).$$

Weil bedingte Erwartungen nur f.s. definiert sind, folgt somit

$$\mathbb{1}_F \cdot \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) \overset{\text{f.s.}}{=} \mathbb{1}_F \cdot \mathbb{E}(Y \mid \mathscr{F}) \implies \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) = \mathbb{E}(Y \mid \mathscr{F}) \quad \text{f.s. auf } F.$$

■■

Aufgabe 2.7. Lösung: Wir müssen zeigen, dass

$$\mathbb{E}[(X - Y)\mathbb{1}_F] = 0 \quad \forall F \in \mathscr{F} \iff \mathbb{E}[(X - Y)\Phi] = 0 \quad \forall \Phi \in M_b(\mathscr{F})$$

($M_b(\mathscr{F})$ sind die $\mathscr{F}$-mb, beschränten ZV). Die Richtung „$\Leftarrow$“ ist trivial. Umgekehrt folgt aus $\mathbb{E}[(X - Y)\mathbb{1}_F] = 0$, dass $\mathbb{E}[(X - Y)\Phi] = 0$ für alle beschränkten $\mathscr{F}$-mb Treppenfunktionen Φ gilt. Mit dem Sombrero-Lemma wissen wir, dass wir beliebige $\mathscr{F}$-mb. beschränkte Funktionen durch solche Treppenfunktionen approximieren können und dass dann auch $|\Phi_n| \leqslant |\Phi|$ gilt, vgl. MI Korollar 7.12. Daher können wir dominierte Konvergenz auf $|(X - Y)\Phi_n| \leqslant |(X - Y)\Phi| \in L^1(\mathbb{P})$ anwenden und finden

$$0 = \lim_n \mathbb{E}[(X - Y)\Phi_n] = \mathbb{E}[(X - Y)\Phi] \quad \text{für alle } \Phi \in M_b(\mathscr{F}).$$

■■

Aufgabe 2.8. Lösung: Wir haben

$$\langle \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}), Z \rangle_{L^2} = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})Z] \overset{\text{tower}}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}\{\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})Z \mid \mathscr{F}\}]$$
$$\overset{\text{pull out}}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})\mathbb{E}\{Z \mid \mathscr{F}\}] = \langle \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}), \mathbb{E}\{Z \mid \mathscr{F}\} \rangle_{L^2}.$$

Die zweite Gleichheit zeigt man genauso.

■■

Aufgabe 2.9. Lösung: Für alle $F \in \mathscr{F}$ gilt wegen der L^1-Konvergenz

$$\int_F X \, d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_F X_n \, d\mathbb{P} \overset{\text{Def}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_F \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}) \, d\mathbb{P} = \int_F Z \, d\mathbb{P}$$

und das zeigt $Z = \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})$.

■■

Aufgabe 2.10. Lösung: Die Gleichheit

$$\forall F \in \mathscr{F} : \int_F X \, d\mathbb{P} = \int \mathbb{1}_F X \, d\mathbb{P} \overset{X \perp\!\!\!\perp F}{=} \int \mathbb{1}_F \, d\mathbb{P} \int X \, d\mathbb{P} = \mathbb{P}(F)\, \mathbb{E}X = \int_F \mathbb{E}X \, d\mathbb{P}$$

zeigt, dass $\mathbb{E}X$ eine Version der bedingten Erwartung $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})$ ist.

■■

Aufgabe 2.11. Lösung: X, Y haben nur Werte $0, 1$. Die σ-Algebra $\mathscr{F}$ wird erzeugt durch $A_0 = \{X + Y = 0\}$ und $A_1 = \{X + Y \geqslant 1\}$. Wir wissen, dass

$$\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) = \alpha_0 \mathbb{1}_{A_0} + \alpha_1 \mathbb{1}_{A_1}$$

mit $\alpha_j = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{A_j})/\mathbb{P}(A_j)$. Aber in A_0 ist $X = 0$, d.h. $\alpha_0 = 0$. Andererseits gilt

$$X = \mathbb{1}_{\{X=1\}} \implies X\mathbb{1}_{A_1} = \mathbb{1}_{\{X=1\}}\mathbb{1}_{\{X+Y\geqslant 1\}} = \mathbb{1}_{\{X=1\}}$$

(nachdenken! X, Y können nur 0 oder 1 sein!). Damit

$$\alpha_1 = \frac{p}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{p}{1-(1-p)^2}$$

und daher

$$\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) = \frac{p}{1-(1-p)^2}\,\mathbb{1}_{\{X+Y\geqslant 1\}}.$$

Da X, Y symmetrische Rollen spielen, erhalten wir

$$\mathbb{E}(Y \mid \mathscr{F}) = \frac{p}{1-(1-p)^2}\,\mathbb{1}_{\{X+Y\geqslant 1\}},$$

und diese ZV sind sicher nicht mehr unabhängig.

■■

Aufgabe 2.12. Lösung: Schreibe

$$X - \mathbb{E}X = \underbrace{X - \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})}_{\perp\!\!\!\perp \mathscr{F}} + \underbrace{\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) - \mathbb{E}X}_{\mathscr{F}\text{-mb}}.$$

Daher

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2) &= \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})]^2) + \mathbb{E}([\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) - \mathbb{E}X]^2)\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{V}(X \mid \mathscr{F})) + \mathbb{V}(\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})).\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 2.13. Lösung: Wir zeigen $\mathbb{1}_{A\cap B} = 0$ f.s. Es ist $\mathbb{P}(A \mid \mathscr{F}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathscr{F})$ eine $\mathscr{F}$-mb ZV. Daher ist $B \in \mathscr{F}$. Mithin:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B) \overset{\text{tower}}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B \mid \mathscr{F})) \overset{\text{pull out}}{=} \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathscr{F})}_{=0 \text{ auf } B}\mathbb{1}_B) = 0.$$

Damit $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B) = \mathbb{P}(A \cap B) = 0$ also $\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cap B} = 0$ f.s. also $B \subset A^c$ bis auf eine Nullmenge.

■■

Aufgabe 2.14. Lösung: Es gilt

$$\frac{\int_F \mathbb{P}(A \mid \mathscr{F})\, d\mathbb{P}}{\int_\Omega \mathbb{P}(A \mid \mathscr{F})\, d\mathbb{P}} = \frac{\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_F \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathscr{F})\right)}{\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathscr{F})\right)} \overset{\text{pull}}{\underset{\text{out}}{=}} \frac{\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\mathbb{1}_F \mathbb{1}_A \mid \mathscr{F})\right)}{\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathscr{F})\right)}$$
$$\overset{\text{tower}}{=} \frac{\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_F \mathbb{1}_A\right)}{\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A\right)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap F)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(F \mid A).$$

■■

Aufgabe 2.15. Lösung: Wir definieren $Y := \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})$. Wenn $X \in L^2$, dann ist alles sehr einfach: Zunächst bemerken wir, dass

$$X \sim \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) \implies \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2)$$

und daher gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-Y)^2] &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) \\
&\overset{\text{tower}}{=} \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(\mathbb{E}(XY \mid \mathscr{F})) + \mathbb{E}(Y^2) \\
&\overset{\text{pull out}}{=} \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(Y\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})) + \mathbb{E}(Y^2) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(Y^2) + \mathbb{E}(Y^2) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2) = 0,
\end{aligned}$$

was dann $X = Y$ f.s. zeigt.

Nun sei $X \in L^1$. Dann ist

$$X_n := (-n) \vee X \wedge n \in L^2 \quad \text{und} \quad Y_n := (-n) \vee Y \wedge n = (-n) \vee \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) \wedge n \in L^2.$$

Nach dem eben Bewiesenen gilt $X_n \sim Y_n$ & $Y_n = \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}) \implies X_n = Y_n$ f.s. $\implies X = Y$ f.s., weil $X_n \to X$, $Y_n \to Y$ f.s. (und in L^1 wg. dominierter Konvergenz).

Wir müssen nur $Y_n = \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F})$ zeigen, da die Abschneideoperation die Verteilungsgleichheit erhält.

i) Y_n ist $\mathscr{F}$-messbar, da $Y_n := (-n) \vee Y \wedge n$ und Y $\mathscr{F}$-messbar ist.

ii) Mit der bedingten Jensen-Ungleichung für die konkave Funktion $x \mapsto n \wedge x$ erhalten wir

$$\mathbb{E}(X \wedge n \mid \mathscr{F}) \leqslant \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) \wedge n = Y \wedge n.$$

iii) Wenn wir in ii) den Erwartungswert bilden, sehen wir

$$\mathbb{E}(X \wedge n) \leqslant \mathbb{E}(Y \wedge n) \overset{X \sim Y}{=} \mathbb{E}(X \wedge n),$$

also kann in der Ungleichung in ii) nur auf einer Nullmenge „<" gelten, d.h. wir haben

$$\mathbb{E}(X \wedge n \mid \mathscr{F}) = Y \wedge n.$$

iv) Analog erhalten wir dann noch

$$\mathbb{E}((-n) \vee X \wedge n \mid \mathscr{F}) = (-n) \vee Y \wedge n.$$

Aufgabe 2.16. Lösung: Wir definieren $Y := \mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})$. Mit Hilfe von bJensen sehen wir $\mathbb{E}(Y^2) \leqslant \mathbb{E}(X^2) < \infty$. Nun verwenden wir die Unabhängigkeit

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y \overset{\mathbb{E}X=\mathbb{E}Y}{=} (\mathbb{E}Y)^2.$$

Weil die bedingte Erwartung eine orghogonale Projektion ist, wissen wir

$$X - Y \perp Y \iff \mathbb{E}[(X-Y)Y] = 0 \implies \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(Y^2).$$

Damit gilt $\mathbb{E}(Y^2) = (\mathbb{E}Y)^2$, also $\mathbb{V}Y = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}Y)^2] = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}Y)^2 = 0$, d.h. $Y \equiv \mathbb{E}Y = \mathbb{E}X$.

Aufgabe 2.17. Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X| \geqslant a \mid \mathscr{F}) &\leqslant \mathbb{P}(X^2 \geqslant a^2 \mid \mathscr{F})\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X^2 \geqslant a^2\}} \mid \mathscr{F})\\ &\leqslant \mathbb{E}\left(\frac{X^2}{a^2}\mathbb{1}_{\{X^2 \geqslant a^2\}} \mid \mathscr{F}\right)\\ &\leqslant \frac{1}{a^2}\mathbb{E}\left(X^2 \mid \mathscr{F}\right).\end{aligned}$$

Aufgabe 2.18. Lösung: $\boxed{\text{Achtung: Fehler in Angabe! Es muss gelten: } p, q \in [1,\infty]}$ Zunächst sollten wir uns klar machen, was die Ungleichung im Fall $p = 1, q = \infty$ (oder $p = \infty, q = 1$) bedeutet. Hier ist $X \in L^1$ und $Z \in L^\infty$, d.h. Z ist f.s. durch eine Konstante beschränkt: $|Z| \leqslant K$ f.s. Daher gilt

$$|\mathbb{E}(XZ \mid \mathscr{F})| \leqslant \mathbb{E}(|X| \cdot |Z| \mid \mathscr{F}) \leqslant \mathbb{E}(|X| \cdot K \mid \mathscr{F}) = K \cdot \mathbb{E}(|X| \mid \mathscr{F})$$

und das ist die Behauptung.

Nun zum interessanteren Fall $p, q \in (1,\infty)$. OE seien $X, Z \geqslant 0$. Wir kennen aus [Schilling-MI, Lemma 14.2] die Youngsche Ungleichung:

$$AB \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}, \quad A, B \geqslant 0,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Wir definieren

$$A := \frac{X}{\mathbb{E}(X^p \mid \mathscr{F})^{1/p}} \quad \text{und} \quad B := \frac{Z}{\mathbb{E}(Z^q \mid \mathscr{F})^{1/q}}$$

und erhalten dann

$$\frac{XZ}{\mathbb{E}(X^p \mid \mathscr{F})^{1/p}\mathbb{E}(Z^q \mid \mathscr{F})^{1/q}} \leqslant \frac{X^p}{p\mathbb{E}(X^p \mid \mathscr{F})} + \frac{Z^q}{q\mathbb{E}(Z^q \mid \mathscr{F})}.$$

Nun bilden wir die bedingte Erwartung $\mathbb{E}(\cdots \mid \mathscr{F})$ auf beiden Seiten dieser Ungleichung und sehen (mit pull-out und Linearität)

$$\frac{\mathbb{E}(XZ \mid \mathscr{F})}{\mathbb{E}(X^p \mid \mathscr{F})^{1/p}\mathbb{E}(Z^q \mid \mathscr{F})^{1/q}} \leqslant \frac{\mathbb{E}(X^p \mid \mathscr{F})}{p\mathbb{E}(X^p \mid \mathscr{F})} + \frac{\mathbb{E}(Z^q \mid \mathscr{F})}{q\mathbb{E}(Z^q \mid \mathscr{F})} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Die Behauptung folgt nun durch einfaches Umstellen.

■■

Aufgabe 2.19. Lösung: Offensichtlich gilt

$$X + Z = \mathbb{E}(X + Z \mid X + Z) = \mathbb{E}(X \mid X + Z) + \mathbb{E}(Z \mid X + Z).$$

Daher reicht es aus, $\mathbb{E}(X \mid X + Z) = \mathbb{E}(Z \mid X + Z)$ zu zeigen. Nach der Definition der bedingten Erwartung ist das äquivalent zu

$$\begin{aligned}
& \int_{X+Z\in B} X\,d\mathbb{P} = \int_{X+Z\in B} Z\,d\mathbb{P} \quad \forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \\
\iff & \int X\mathbb{1}_B(X+Z)\,d\mathbb{P} = \int Z\mathbb{1}_B(X+Z)\,d\mathbb{P} \quad \forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \\
\iff & \iint x\mathbb{1}_B(x+y)\,\mathbb{P}(X \in dx, Z \in dy) = \int y\mathbb{1}_B(x+y)\,\mathbb{P}(X \in dx, Z \in dy) \quad \forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

und die letzte Gleichheit gilt, weil die ZV X, Z iid sind:

$$\begin{aligned}
\iint x\mathbb{1}_B(x+y)\,\mathbb{P}(X \in dx, Z \in dy) &= \iint x\mathbb{1}_B(x+y)\,\mathbb{P}(X \in dx)\mathbb{P}(Z \in dy) \\
&\underset{\text{umbenennen}}{\overset{x\leftrightarrow y}{=}} \iint y\mathbb{1}_B(y+x)\,\mathbb{P}(X \in dy)\mathbb{P}(Z \in dx) \\
&\underset{\text{umbenennen, iid}}{\overset{X\leftrightarrow Z}{=}} \iint y\mathbb{1}_B(y+x)\,\mathbb{P}(Z \in dy)\mathbb{P}(X \in dx) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \iint y\mathbb{1}_B(y+x)\,\mathbb{P}(X \in dx)\mathbb{P}(Z \in dy) \\
&= \iint y\mathbb{1}_B(y+x)\,\mathbb{P}(X \in dx, Z \in dy).
\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 2.20. Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X-Z)^2\right] &\overset{\text{tower}}{=} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left((X-Z)^2 \mid X\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X^2 \mid X) - 2\mathbb{E}(XZ \mid X) + \mathbb{E}(Z^2 \mid X)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^2 - 2X\mathbb{E}(Z \mid X) + \mathbb{E}(Z^2 \mid X)\right] \\
&\overset{\text{Ann.}}{=} \mathbb{E}\left[X^2 - 2X \cdot X + X^2\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daher folgt $X = Z$ f.s.

■■

Aufgabe 2.21. Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z\leqslant c\}}X\right] &\overset{\text{tower}}{=} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Z\leqslant c\}}X \mid Z)\right]\\ &\overset{\text{Messbarkeit}}{=} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z\leqslant c\}}\mathbb{E}(X \mid Z)\right]\\ &\overset{\text{Voraussetzg.}}{=} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z\leqslant c\}}Z\right].\end{aligned}$$

Wir erhalten damit

$$0 = \mathbb{E}\left[(X-Z)\mathbb{1}_{\{Z\leqslant c\}}\right] = \mathbb{E}\left[(X-Z)(\mathbb{1}_{\{X>c\}\cap\{Z\leqslant c\}} + \mathbb{1}_{\{X\leqslant c\}\cap\{Z\leqslant c\}})\right]$$

und damit (beachten Sie für Ungleichung die Menge in den Indikatorfunktionen!)

$$0 \leqslant \mathbb{E}\left[(X-Z)\mathbb{1}_{\{X>c\}\cap\{Z\leqslant c\}}\right] = -\mathbb{E}\left[(X-Z)\mathbb{1}_{\{X\leqslant c\}\cap\{Z\leqslant c\}}\right].$$

Alle Rechnungen bis hierher gelten auch, wenn wir X und Z vertauschen, daher erhalten wir auch

$$0 \leqslant \mathbb{E}\left[(Z-X)\mathbb{1}_{\{Z>c\}\cap\{X\leqslant c\}}\right] = -\mathbb{E}\left[(Z-X)\mathbb{1}_{\{X\leqslant c\}\cap\{Z\leqslant c\}}\right].$$

Und daher folgt zunächst

$$\mathbb{E}\left[(X-Z)\mathbb{1}_{\{X\leqslant c\}\cap\{Z\leqslant c\}}\right] = 0$$

mithin

$$0 \leqslant \mathbb{E}\left[(X-Z)(\mathbb{1}_{\{X>c\}\cap\{Z\leqslant c\}}\right] = 0 \quad \text{und} \quad 0 \leqslant \mathbb{E}\left[(Z-X)(\mathbb{1}_{\{Z>c\}\cap\{X\leqslant c\}}\right] = 0.$$

Also ist entweder $X = Z$ fast sicher oder es gilt

$$\mathbb{P}(\{X>c\}\cap\{Z\leqslant c\}) = \mathbb{P}(\{Z>c\}\cap\{X\leqslant c\}) = 0.$$

Aber auch hieraus folgt $X = Z$ fast sicher, denn

$$0 \leqslant \mathbb{P}\{X \neq Z\} = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(\{Z\leqslant q\}\cap\{X>q\})\right)\cup\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(\{X\leqslant q\}\cap\{Z>q\})\right)\right) \leqslant 0.$$

■■

3 Martingale

Aufgabe 3.1. Lösung: Wenn $\mathbb{E}X^n$ existiert, dann ist $\phi(\theta)$ n-mal differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d^n}{d\theta^n}\phi(0) = \mathbb{E}\left(\frac{d^n}{d\theta^n}e^{\theta X}\Big|_{\theta=0}\right) = \mathbb{E}\left(X^n e^{\theta X}\Big|_{\theta=0}\right) = \mathbb{E}(X^n).$$

Das sieht man ganz einfach mit dem Differentiationssatz für Parameter-Integrale.

In einigen Situationen kann man aus der Existenz von $\mathbb{E}e^{\theta X}$ auf die Existenz von $\mathbb{E}(|X|^n)$ schließen, z.B. wenn $\theta X \geqslant 0$ ist. Dann existieren exponentielle Momente.

Für eine normalverteilte ZV mit Mittel 0 und Varianz 1 gilt

$$\begin{aligned}
\phi(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{\theta x}e^{-x^2/2}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\theta^2/2}e^{\theta x}e^{-x^2/2}\,dx\cdot e^{\theta^2/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-(x-\theta)^2/2}\,dx\cdot e^{\theta^2/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-(y)^2/2}\,dy\cdot e^{\theta^2/2} \\
&= e^{\theta^2/2}.
\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 3.2. Lösung: **Hinweis:** Zum jetzigen Wissensstand ist die Aufgabe relativ schwierig (siehe untenstehende Lösung). Intuitiv ist die Lösung aber klar. Wir haben

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n \mid X_1,\dots,X_{n-1}) &\overset{(*)}{=} \int x\,\mathbb{P}(X_n\in dx\mid X_1,\dots,X_{n-1}) \\
&= \int_0^1 x\frac{1}{X_{n-1}}\mathbb{1}_{[0,X_{n-1}]}\,dx && \text{(Voraussetzung)} \\
&= \int_0^{X_{n-1}} \frac{x}{X_{n-1}}\,dx && \text{(Voraussetzung)} \\
&\leqslant \int_0^{X_{n-1}} 1\,dx \\
&= X_{n-1}
\end{aligned}$$

also ein Supermartingal. Das Problem ist die Rechtfertigung des mit (*) gekennzeichneten Schritts!

Vorbetrachtung: es seien X, Y ZV. Dann gilt für Borelmengen B, C

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X\in B, Y\in C) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X)\mathbb{1}_C(Y)) &\overset{\text{tower}}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X)\mathbb{1}_C(Y)\mid Y)) \\
&\overset{\text{pull out}}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X)\mid Y)\mathbb{1}_C(Y)).
\end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Tatsache (Faktorisierungslemma, z.B. [Schilling-MI, S. 38, Lemma 7.17] oder [Schilling-WT, Anhang A.3], dass es eine Funktion f gibt, so dass $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X) \mid Y) = f(Y)$ (natürlich hängt f von X und B ab). Daher:

$$\mathbb{P}(X \in B, Y \in C)\mathbb{E}(f(Y)\mathbb{1}_C(Y)) = \int_C f(y)\,\mathbb{P}(Y \in dy).$$

Die Aufgabenstellung sagt uns aber, wie für $X = X_n$ und $Y = (X_1, \dots, X_{n-1})$ die Funktion $f(y)$ aussieht: $f(y) = \mathbb{P}(X \in B \mid Y = y) = \int_B y^{-1}\mathbb{1}_{[0,y]}(x)\,dx$. Also gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_n \in B, X_{n-1} \in C, X_{n-2} \in C_{n-2}, \dots, X_1 \in C_1)\\
&= \underset{C_1\times\dots\times C_{n-2}}{\int\!\cdots\!\int} \int_C \int_B \frac{1}{x_{n-1}}\mathbb{1}_{[0,x_{n-1}]}(x)\,dx\,\mathbb{P}(X_1 \in dx_1, \dots, X_{n-1} \in dx_{n-1})\\
&= \int_C \int_B \frac{1}{x_{n-1}}\mathbb{1}_{[0,x_{n-1}]}(x)\,dx\,\mathbb{P}(X_1 \in C_1, \dots, X_{n-2} \in C_{n-2}, X_{n-1} \in dx_{n-1})\\
&= \mathbb{E}\int_B \frac{1}{X_{n-1}}\mathbb{1}_{[0,X_{n-1}]}(x)\mathbb{1}_C(X_{n-1})\mathbb{1}_{C_{n-2}}(X_{n-1})\cdots\mathbb{1}_{C_1}(X_1)\,dx.
\end{aligned}$$

Nun wählen wir $C_1 = \dots = C_{n-2} = \mathbb{R}$ und haben eine Gleichheit zwischen zwei Maßen, aus der sich (*) ergibt.

Wenn wir bedingte Dichten (wie in [Schilling-WT, S. 158*ff.*]) verwenden, gibt es eine viel einfachere und zugleich allgemeinere Lösung.

Aufgabe 3.3. Lösung: Da nach Voraussetzung $\mathbb{E}\xi_n$ und $\mathbb{V}\xi_n$ existieren, ist $\xi_n \in L^2$ und daher ist auch $X_n \in L^2$. X_n ist außerdem als Funktion der $\xi_1, \dots, \xi_n$ $\mathscr{F}_n$-messbar. Nun zur Martingaleigenschaft:

$$\begin{aligned}
X_{n+1}^2 - \mathbb{V}X_{n+1} - (X_n^2 - \mathbb{V}X_n) &\overset{\text{unabh.}}{=} X_{n+1}^2 - X_n^2 - \mathbb{V}X_n - \mathbb{V}\xi_{n+1} + \mathbb{V}X_n\\
&= (X_{n+1} - X_n)(X_{n+1} + X_n) - \mathbb{V}\xi_{n+1}\\
&= \xi_{n+1}(2X_n + \xi_{n+1}) - \mathbb{V}\xi_{n+1}\\
&= 2X_n\xi_{n+1} + \xi_{n+1}^2 - \mathbb{V}\xi_{n+1}
\end{aligned}$$

Nun bilden wir die bedingte Erwartung und erhalten mit pull-out und Unabhängigkeit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{n+1} - M_n \mid \mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}(2X_n\xi_{n+1} + \xi_{n+1}^2 - \mathbb{V}\xi_{n+1} \mid \mathscr{F})\\
&= 2X_n\mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) + \mathbb{E}(\xi_{n+1}^2 \mid \mathscr{F}_n) - \mathbb{V}\xi_{n+1}\\
&= 2X_n\mathbb{E}(\xi_{n+1}) + \mathbb{E}(\xi_{n+1}^2) - \mathbb{V}\xi_{n+1}\\
&= \mathbb{E}(\xi_{n+1}^2) - \mathbb{V}\xi_{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Beachte, dass $\mathbb{E}\xi_{n+1} = 0$, d.h. $\mathbb{V}\xi_{n+1} = \mathbb{E}(\xi_{n+1}^2)$.

Aufgabe 3.4. Lösung:

(a) Die ZV M_n sind offensichtlich integrierbar (da beschränkt) und $\mathscr{F}_n$-mb (da Funktion von $X_1, \dots, X_n$. Wir sehen daher

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}(M_n + \xi_{n+1} - (p-q) \mid \mathscr{F}_n) \\ &= M_n + \mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) - (p-q) \\ &\overset{\xi_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_n}{=} M_n + \underbrace{\mathbb{E}(\xi_{n+1}) - (p-q)}_{\mathbb{E}\xi_{n+1} = \mathbb{E}\xi_1 = p-q} = M_n.\end{aligned}$$

(b) Offensichtlich gilt $N_{n+1} = N_n \left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_{n+1}}$. Integrierbarkeit von N_n ist klar (ist nämlich beschränkt!). Weil $\xi_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_n$ und da N_n $\mathscr{F}_n$-messbar ist, folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) &= N_n \, \mathbb{E}\Big[\left(\tfrac{q}{p}\right)^{\xi_{n+1}} \Big| \mathscr{F}_n \Big] \\ &= N_n \, \mathbb{E}\Big[\left(\tfrac{q}{p}\right)^{\xi_{n+1}} \Big] \\ &= N_n \left[\tfrac{q}{p} \, \mathbb{P}(\xi_{n+1} = 1) + \tfrac{p}{q} \, \mathbb{P}(\xi_{n+1} = -1) \right] \\ &= N_n \left[\tfrac{q}{p} \, p + \tfrac{p}{q} \, q \right] = N_n.\end{aligned}$$

Aufgabe 3.5. Lösung: Die Richtung „$\Leftarrow$“ ist offensichtlich. Die Umkehrung „$\Rightarrow$“ verwendet die tower property mehrfach:

$$\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_k) \underset{n-1 \leqslant k}{\overset{\text{tower}}{=}} \mathbb{E}(\mathbb{E}[X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}] \mid \mathscr{F}_k) \overset{\text{Annahme}}{=} \mathbb{E}(X_{n-1} \mid \mathscr{F}_k)$$

und wenn $n-1 < k$ ist, wiederholen wir diesen Schritt, bis wir X_k erreichen.

Für Sub- oder Supermartingale müssen wir einfach „=“ durch die entsprechenden Ungleichheitszeichen ersetzten.

Aufgabe 3.6. Lösung: **Lösung 1.** Für das sub-MG $(-X_n)_n$ haben wir die eindeutige Doob-Zerlegung:

$$-X_n = -X_0 + M_n + A_n$$

mit M_n Martingal mit $M_0 = 0$ und dem wachsenden Prozeß $A_0 \leqslant A_1 \leqslant A_2 \leqslant \cdots$. Indem wir Erwartungen auf beiden Seiten bilden finden wir

$$\begin{aligned}-\mathbb{E}X_n &= -\mathbb{E}X_0 + \mathbb{E}M_n + \mathbb{E}A_n \\ &= -\mathbb{E}X_0 + 0 + \mathbb{E}A_n \qquad \text{(da Martingal)}\end{aligned}$$

und da $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0$ folgt $\mathbb{E}A_n = 0$. Da aber $A_0 \geqslant 0$ und $A_n \uparrow$, muß $A_n = 0$ gelten. Damit

$$-X_n = -X_0 + M_n \implies X_n = M_n + X_0 \implies \text{MG!}.$$

Lösung 2: Da X_n ein super-MG ist, gilt $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \leqslant X_n$. Damit ist die ZV

$$U_n := X_n - \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \geqslant 0.$$

Nun gilt aber

$$0 \leqslant \mathbb{E}U_n = \mathbb{E}X_n - \mathbb{E}\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \overset{\text{tower}}{=} \mathbb{E}X_n - \mathbb{E}X_{n+1} = 0.$$

Damit gilt $U_n = 0$ oder $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = X_n$.

Lösung 3: Da X_n ein super-MG ist, gilt für jedes $n \geqslant 0$

$$\int_F X_{n+1}\,d\mathbb{P} \leqslant \int_F X_n\,d\mathbb{P} \quad \forall F \in \mathscr{F}_n.$$

Nach Voraussetzung haben wir $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_{n+1}$ (konstant!!), also

$$\int_\Omega X_{n+1}\,d\mathbb{P} = \int_\Omega X_n\,d\mathbb{P}.$$

Ziehen wir diese Formel von der vorangehenden ab, finden wir für alle $F \in \mathscr{F}_n$

$$\begin{aligned} -\int_{F^c} X_{n+1}\,d\mathbb{P} &= \int_F X_{n+1}\,d\mathbb{P} - \int_\Omega X_{n+1}\,d\mathbb{P} \\ &\leqslant \int_F X_n\,d\mathbb{P} - \int_\Omega X_n\,d\mathbb{P} = -\int_{F^c} X_n\,d\mathbb{P} \end{aligned}$$

also

$$\int_{F^c} X_{n+1}\,d\mathbb{P} \geqslant \int_{F^c} X_n\,d\mathbb{P} \quad \forall F \in \mathscr{F}_n.$$

Da aber $F \in \mathscr{F}_n \iff F^c \in \mathscr{F}_n$, folgt

$$\int_F X_{n+1}\,d\mathbb{P} = \int_F X_n\,d\mathbb{P} \quad \forall F \in \mathscr{F}_n.$$

■■

Aufgabe 3.7. Lösung: Wir bemerken zunächst, dass $C \bullet M$ ein Martingal ist, d.h. die linke Seite der Behauptung ist wohldefiniert und dass DC ein vorhersagbarer beschränkter Prozess ist, d.h. die rechte Seite ist wohldefiniert.

Nun gilt

$$\begin{aligned} D \bullet (C \bullet M)_n &= \sum_{i=1}^n D_i(C \bullet M_i - C \bullet M_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n D_i(C_i(M_i - M_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n D_i C_i (M_i - M_{i-1}) \\ &= (DC) \bullet M_n. \end{aligned}$$

■■

Aufgabe 3.8. Lösung:

(a) Da $m \leqslant n$ finden wir

$$\mathbb{E}(X_m Y_n \mid \mathscr{F}_m) \overset{\text{pull out}}{=} X_m \mathbb{E}(Y_n \mid \mathscr{F}_m) \overset{\text{MG}}{=} X_m Y_m.$$

(b) Wir nehmen den Erwartungswert in der Relation aus a) mit $m = j-1$ und $n = j$

$$\mathbb{E}(X_{j-1} Y_j) \overset{\text{tower}}{=} \underbrace{\mathbb{E}\mathbb{E}(X_{j-1} Y_j \mid \mathscr{F}_{j-1}) = \mathbb{E}(X_{j-1} Y_{j-1})}_{\text{aus a)}}$$

und da X_k und Y_k symmetrische Rollen spielen finden wir auch

$$\mathbb{E}(Y_{j-1} X_j) = \mathbb{E}(X_{j-1} Y_{j-1}).$$

Somit

$$\mathbb{E}[(X_j - X_{j-1})(Y_j - Y_{j-1})] = \mathbb{E}(X_j Y_j) - \mathbb{E}(X_{j-1} Y_{j-1})$$

und die Behauptung folgt, indem wir über $j = 1, 2, \dots, n$ summieren.

(c) Wir nehmen in b) $X_n = Y_n$ und finden dann

$$\mathbb{E}\left(X_n^2\right) = \mathbb{E}\left(X_0^2\right) + \sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left((X_j - X_{j-1})^2\right).$$

Da die ZV $X_j - X_{j-1}$, $j = 1, 2, \dots, n$ Erwartungswert 0 haben, gilt

$$\mathbb{V}(X_j - X_{j-1}) = \mathbb{E}\left((X_j - X_{j-1})^2\right);$$

weiter ist $\mathbb{V}X_n^2 = \mathbb{E}(X_n^2) - (\mathbb{E}X_n)^2 = \mathbb{E}(X_n^2) - (\mathbb{E}X_0)^2$, da $(X_n)_n$ ein MG ist.

(d) Für festes n und jedes $\mathscr{F}_{n-1}$-mb. ZV $Z \in L^2$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z(X_n - X_{n-1})) &\overset{\text{tower}}{=} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}[Z(X_n - X_{n-1}) \mid \mathscr{F}_{n-1}]\right) \\
&\overset{\text{pull out}}{=} \mathbb{E}\left(Z\mathbb{E}[(X_n - X_{n-1}) \mid \mathscr{F}_{n-1}]\right) \\
&\overset{\text{Martingal}}{=} \mathbb{E}\left(Z \cdot 0\right) = 0.
\end{aligned}$$

Damit ist der Zuwachs $X_n - X_{n-1} \perp \mathscr{F}_{n-1}$ und da $X_0, X_1 - X_0, X_2 - X_1, \dots, X_{n-1} - X_{n-2}$ alle $\mathscr{F}_{n-1}$-mb. sind, sind die Zuwächse paarweise orthogonal.

(e) Wir erhalten mit Hilfe der Polarisationsformel

$$4X_n Y_n = (X_n + Y_n)^2 - (X_n - Y_n)^2$$

und daher

$$4(X_n Y_n - \langle X, Y \rangle_n) = \left[(X_n + Y_n)^2 - \langle X + Y \rangle_n\right] - \left[(X_n - Y_n)^2 - \langle X - Y \rangle_n\right].$$

Entsprechend der Definition von $\langle Z \rangle$ ist $Z^2 - \langle Z \rangle$ ein Martingal (wenn Z ein Martingal mit $Z_n \in L^2$ ist), d.h. auf der rechten Seite der letzten Gleichheit steht die Differenz zweier Martingale, d.h. es ist wieder ein Martingal.

Aufgabe 3.9. Lösung: Es gilt $X_0 = 0$ und $X_i - X_{i-1} = \mathbb{1}_{F_i}$, also ist nach (3.9)

$$A_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i - X_{i-1} \mid \mathscr{F}_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{F_i} \mid \mathscr{F}_{i-1}),$$

und nach (3.10)

$$M_n = X_n - A_n = \sum_{i=1}^n (\mathbb{1}_{F_i} - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{F_i} \mid \mathscr{F}_{i-1}))\,.$$

Aufgabe 3.10. Lösung: $\boxed{\text{Fehler in der Angabe: } (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ und } \mathscr{F}_n = \sigma(X_0,\dots,X_n)}$

(a) Es gilt $S_n = S_{n-1} + X_n X_{n-1}$. Weil die X_n nur ± 1 sein können, gilt offensichtlich

$$\{S_n > S_{n-1}\} = \{X_{n-1}X_n = 1\} = \{X_{n-1} = X_n = -1\} \cup \{X_{n-1} = X_n = 1\}$$

und wegen Unabhängigkeit ist

$$\mathbb{P}(S_n > S_{n-1}) = \mathbb{P}(X_{n-1} = -1)\mathbb{P}(X_n = -1) + \mathbb{P}(X_{n-1} = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) = q^2 + p^2.$$

Wenn wir $q = 1 - p$ einsetzen und die Kurve $p \mapsto p^2 + (1-p)^2$ diskutieren, sehen wir dass diese Kurve bei $p = 1/2$ minimal wird und das Minimum $1/2$ hat.

(b) Es gilt $S_n = S_{n-1} + X_n X_{n-1}$. Weil die ZV S_{n-1} und X_{n-1} $\mathscr{F}_{n-1}$-mb. sind gilt mit pull-out und Linearität

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) &= S_{n-1} + X_{n-1}\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) \\
&\overset{X_n \perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_{n-1}}{=} S_{n-1} + X_{n-1}\mathbb{E}(X_n) \\
&= S_{n-1} + (p-q)X_{n-1}.
\end{aligned}$$

Indem wir in dieser Gleichheit den Erwartungswert bilden, folgt

$$\mathbb{E}S_n = \mathbb{E}S_{n-1} + (p-q)^2 \xRightarrow{\text{Rekrusion}} \mathbb{E}S_n = a + n(p-q)^2.$$

(c) Wegen $x^{S_n} = x^{S_{n-1}} x^{X_n X_{n-1}}$ gilt mit pull-out

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(x^{S_n} \mid \mathscr{F}_{n-1}\right) &= x^{S_{n-1}}\mathbb{E}\left(x^{X_n X_{n-1}} \mid \mathscr{F}_{n-1}\right) \\
&\overset{2.8.c}{=} x^{S_{n-1}}\mathbb{E}\left(x^{X_n t}\right)\Big|_{t = X_{n-1}} \\
&= x^{S_{n-1}}\left(p x^{X_{n-1}} + q x^{-X_{n-1}}\right).
\end{aligned}$$

Das konnen wir folgendermaßen schreiben

$$\mathbb{E}\left(x^{S_n} \mid \mathscr{F}_{n-1}\right) = x^{S_{n-1}}\left(\mathbb{1}_{\{X_{n-1}=1\}}\left(px + \tfrac{q}{x}\right) + \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=-1\}}\left(\tfrac{p}{x} + qx\right)\right),$$

und es folgt

$$\mathbb{E}\left(x^{S_n} \mid \mathscr{F}_{n-1}\right) \leqslant x^{S_{n-1}}\left(x + \tfrac{1}{x}\right).$$

Wir setzen $y = x + 1/x$ und dividieren beide Seiten durch y^n. Es folgt

$$\mathbb{E}\left(\frac{x^{S_n}}{y^n} \mid \mathscr{F}_{n-1}\right) \leqslant \frac{x^{S_{n-1}}}{y^{n-1}}.$$

Wir behaupten, dass diese Folge gegen Null konvergiert. Zunächst bemerken wir, dass

$$a - n \leqslant S_n \leqslant a + n$$

gilt. Daher gilt

für $x \in (0,1)$**,** dass $0 \leqslant x^{S_n} \leqslant x^{a-n} \implies 0 \leqslant \frac{x^{S_n}}{y^n} \leqslant \frac{x^a}{(yx)^n} \leqslant x^a$, weil $yx = 1 + x^2 > 1$.

für $x \geqslant 1$**,** dass $0 \leqslant x^{S_n} \leqslant x^{a+n} \implies 0 \leqslant \frac{x^{S_n}}{y^n} \leqslant x^a \frac{x^n}{y^n} \leqslant x^a$, weil $y/x = 1 + 1/x^2 > 1$.

Aus diesen Abschätzungen folgt, dass $x^{S_n}/y^n \to 0$.

(d) Die Zerlegung $S = a + M + A$ in ein Martingal M und einen vorhersagbaren Prozess A folgt aus der Doob-Zerlegung. Was nicht klar ist, ist die L^2-Integrierbarkeit von M (und A).

Weil S_n beschränkt ist und weil $A_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(S_i - S_{i-1} \mid \mathscr{F}_{i-1})$ gilt (vgl. den Beweis der Doob-Zerlegung), folgt, dass S_n und A_n in L^2 sind, damit aber $M_n = S_n - a - A_n \in L^2$.

Den Kompensator $\langle M\rangle$ von M erhalten wir mit der Formel (3.13):

$$\langle M\rangle_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left((M_i - M_{i-1})^2 \mid \mathscr{F}_{i-1}\right).$$

Aus der Doob-Zerlegung von X wissen wir aber auch (ähnliche Rechnung wie in Teil b))

$$\begin{aligned}
M_i - M_{i-1} &= (S_i - S_{i-1}) - (A_i - A_{i-1}) \\
&= (S_i - S_{i-1}) - \mathbb{E}\left((S_i - S_{i-1}) \mid \mathscr{F}_{i-1}\right) \\
&= X_i X_{i-1} - X_{i-1}\mathbb{E}(X_i) \\
&= X_{i-1}(X_i - (p-q))
\end{aligned}$$

also $(M_i - M_{i-1})^2 = (X_i - (p-q))^2$, weil $X_{i-1} = \pm 1$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((M_i - M_{i-1})^2 \mid \mathscr{F}_{i-1}\right) &= \mathbb{E}\left((X_i - (p-q))^2 \mid \mathscr{F}_{i-1}\right) \\
&\overset{X_i \perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_{i-1}}{=} \mathbb{E}\left((X_i - (p-q))^2\right) \\
&= \mathbb{V}X_i = 4pq
\end{aligned}$$

und somit $\langle M\rangle_n = 4pqn$.

Aufgabe 3.11. Lösung:

(a) Wir verwenden die natürliche Filtration $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Nach Voraussetzung gilt

$$\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0 = \mathbb{E}X_{n+1}.$$

Weil X ein Super-MG (SMG) ist, gilt für alle n und $F \in \mathscr{F}_n$

$$\begin{aligned}\int_F X_{n+1}\,d\mathbb{P} \overset{\text{SMG}}{\leqslant} \int_F X_n\,d\mathbb{P} &= \mathbb{E}X_n - \int_{F^c} X_n\,d\mathbb{P}\\ &\overset{\text{SMG}}{\leqslant} \mathbb{E}X_n - \int_{F^c} X_{n+1}\,d\mathbb{P}\\ &= \mathbb{E}X_{n+1} - \int_{F^c} X_{n+1}\,d\mathbb{P} = \int_F X_{n+1}\,d\mathbb{P}\end{aligned}$$

und daher gilt überall „=“ und X ist ein Martingal.

(b) Die ZV $X_n \wedge a$ haben alle die gleiche Verteilung und damit gleiche Erwartungswerte. Nach Teil a) genügt es daher zu zeigen, dass $(X_n \wedge a)_n$ ein Super-MG ist. Das folgt entweder aus Satz 3.5.e (angewendet auf das sub-MG $-X$) oder durch direkte Rechnung:

$$|X_n \wedge a| \leqslant |X_n| + a \in L^1(\mathbb{P}), \quad X_n \wedge a \text{ ist offensichtlich } \mathscr{F}_n\text{-messbar.}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}X_{n+1} \wedge a \leqslant a &\implies \mathbb{E}(X_{n+1} \wedge a \mid \mathscr{F}_n) \leqslant \mathbb{E}(a \mid \mathscr{F}_n) = a\\ X_{n+1} \wedge a \leqslant X_{n+1} &\implies \mathbb{E}(X_{n+1} \wedge a \mid \mathscr{F}_n) \leqslant \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \leqslant X_n\end{aligned}$$

und es folgt $\mathbb{E}(X_{n+1} \wedge a \mid \mathscr{F}_n) \leqslant X_n \wedge a$, also Super-MG.

Analog zeigt man, dass $(X_n \vee a)_n$ ein sub-MG ist und mit dem Argument aus Teil a) finden wir – mutatis mutandis – dass es sich auch hier um ein MG handelt.

(c) Wir zeigen $\{X_m \geqslant a\} \subset \{X_{m+1} \geqslant a\}$ „fast sicher“ für $m \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$, d.h. $\mathbb{P}(\{X_m \leqslant a\} \setminus \{X_{m+1} \leqslant a\}) + \mathbb{P}(\{X_{m+1} \leqslant a\} \setminus \{X_m \leqslant a\}) = 0$.

Offenbar ist $\{X_m \geqslant a\} = \{X_m \wedge a - a = 0\} \in \mathscr{F}_m$, und weil $(X_n \wedge a)_n$ ein MG ist, gilt

$$\int_{\{X_m \geqslant a\}} (X_{m+1} \wedge a - a)\,d\mathbb{P} = \int_{\{X_m \geqslant a\}} (X_m \wedge a - a)\,d\mathbb{P} = 0.$$

Andererseits ist auf der Menge $\{X_m \geqslant a\}$ der Integrand $(X_{m+1} \wedge a - a) \leqslant 0$, d.h. $(X_{m+1} \wedge a - a) = 0$ fast sicher auf $\{X_m \geqslant a\}$. Damit gilt die behauptete Inklusion $\{X_m \geqslant a\} \subset \{X_{m+1} \geqslant a\}$ „bis auf eine Nullmenge“.

(d) Wir wenden Teil c) auf die Konstante $b \in \mathbb{R}$ und das MG $(X_n \vee b)_n$ an. Dann gilt $\{X_m \leqslant b\} \subset \{X_{m+1} \leqslant b\}$ fast sicher. Für $a < b$ folgt

$$\mathbb{P}(X_m \in [a,b], X_{m+1} \notin [a,b]) = 0, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Weiter gilt

$$\{|X_m - X_{m+1}| > 1/n\} \subset \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{X_m \in [q, q+n^{-1}]\} \cap \{X_{m+1} \notin [q, q+n^{-1}]\}$$

$$\implies \mathbb{P}\{|X_m - X_{m+1}| > 1/n\} \leqslant \sum_{q\in\mathbb{Q}} \mathbb{P}(X_m \in [q, q+n^{-1}],\ X_{m+1} \notin [q, q+n^{-1}]) = 0.$$

Weil $\mathbb{P}(X_m \neq X_{m+1}) = \mathbb{P}(\bigcup_n \{|X_m - X_{m+1}| > 1/n\}) = 0$, erhalten wir $X_m = X_{m+1}$ f.s. Schließlich folgt

$$\mathbb{P}(X_m = X_n \quad \forall m, n) = \mathbb{P}\left(\Omega \setminus \bigcup_k \{X_k \neq X_{k+1}\}\right) = 1.$$

Aufgabe 3.12. Lösung: Wie üblich sei $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ die triviale σ-Algebra. Daher ist $M_0 = \mathbb{E}M_0 =: m$. Weil M_n $\mathscr{F}_n$-mb ist, können wir M_n in der Form $M_n = f_n(\xi_1 \dots, \xi_n)$ darstellen (f_n ist eine geeignete Borel-messbare Funktion – Faktorisierungslemma, vgl. Anhang A.3). Es folgt

$$M_n = f_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0)\mathbb{1}_{\{\xi_n=0\}} + f_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 1)\underbrace{\mathbb{1}_{\{\xi_n=1\}}}_{=\xi_n} \tag{3.1}$$

$$= f_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0) + (f_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 1) - f_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0))\underbrace{\mathbb{1}_{\{\xi_n=1\}}}_{=\xi_n} \tag{3.2}$$

weil $(M_n)_n$ ein MG ist, erhalten wir aus (3.1) und der iid-Eigenschaft, dass

$$\begin{aligned} M_{n-1} = \mathbb{E}(M_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(f_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0)\mathbb{1}_{\{\xi_n=0\}} + f_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 1)\mathbb{1}_{\{\xi_n=1\}} \mid \mathscr{F}_{n-1}) \\ &= f_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0)\mathbb{P}\{\xi_n = 0\} + f_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 1)\mathbb{P}\{\xi_n = 1\} \\ &= f_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0)(1-p) + f_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 1)p. \end{aligned}$$

Mithin

$$M_n - M_{n-1} = \underbrace{(f_n(\xi_1 \dots, \xi_{n-1}, 1) - f_n(\xi_1 \dots, \xi_{n-1}, 0))}_{=:C_n}(\xi_n - p)$$

und mit einem Teleskopargument folgt dann die Behauptung.

Aufgabe 3.13. Lösung: Wir betrachten iid ZV $(\xi_i)_i$ mit $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, und definieren für ein fest gewähltes $N \in \mathbb{N}$, $N > 2$

$$X_n := \begin{cases} \sum_{i=1}^n \xi_i, & n \leqslant N, \\ \sum_{i=1}^N \xi_i + \xi_1 - \xi_2, & n > N. \end{cases}$$

Für $n \leqslant N$ und $n \geqslant N+2$ rechnen wir leicht nach, dass $\mathbb{E}(X_n \mid X_{n-1}) = X_{n-1}$ gilt. Wenn $n = N+1$ ist, dann haben wir

$$\mathbb{E}(X_{N+1} \mid X_N) = X_N + \mathbb{E}(\xi_1 \mid X_N) - \mathbb{E}(\xi_2 \mid X_N) \underset{\text{wegen iid}}{\overset{\mathbb{E}(\xi_1|X_N)=\mathbb{E}(\xi_2|X_N)}{=}} X_N.$$

Andererseits ist X_{N+1} messbar bezüglich $\mathscr{F}_N$, d.h. $\mathbb{E}(X_{N+1} \mid \mathscr{F}_N) = X_{N+1} \neq X_N$.

4 Stoppen und Lokalisieren

Aufgabe 4.1. Lösung: Es gilt $\{T = 70\} = \{X_{70} = \sup_{k \leqslant 100} X_k\} \in \mathscr{F}_{100}$, aber nicht $\in \mathscr{F}_{70}$. Intuitiv: um $X_n = \sup_{k \leqslant 100} X_k$ entscheiden zu können, müssen wir $X_1, \dots, X_{100}$ kennen, d.h. für $T = 70$ müssen wir „in die Zukunft" $n \in (71, 100]$ blicken können.

■■

Aufgabe 4.2. Lösung: Wir haben

$$\{\tau_B^\circ \geqslant n\} = \{X_0 \notin B\} \cap \{X_1 \notin B\} \cap \dots \cap \{X_{n-1} \notin B\} \in \mathscr{F}_{n-1} \subset \mathscr{F}_n.$$

und

$$\{\tau_B^\circ \geqslant n\} = \{X_1 \notin B\} \cap \dots \cap \{X_{n-1} \notin B\} \in \mathscr{F}_{n-1} \subset \mathscr{F}_n.$$

■■

Aufgabe 4.3. Lösung: Für $n < N$ gilt $\{\sigma_B = n\} = \{X_n \in B\} \cap \{X_{n+1} \notin B\} \cap \dots \cap \{X_N \notin B\}$ und diese Menge ist i.Allg. nicht $\mathscr{F}_n$-messbar.

■■

Aufgabe 4.4. Lösung:

(a) **Vorbemerkung:** Es sei $\mathscr{F}$ irgendeine σ-Algebra. Dann gilt $F \in \mathscr{F} \iff F^c \in \mathscr{F}$.

Daher reicht es aus, $\{T \geqslant n\}^c \in \mathscr{F}_{n-1}$ zu zeigen. Nun gilt aber

$$\{T \geqslant n\}^c = \{T < n\} = \{T \leqslant n-1\} \in \mathscr{F}_{n-1}.$$

Schlussbemerkung: Diese Aufgabe zeigt, dass gilt

$$\underbrace{\forall n : \{T \leqslant n\} \in \mathscr{F}_n}_{\text{Definition „Stoppzeit"}} \iff \underbrace{\forall n : \{T < n\} \in \mathscr{F}_n}_{\text{Definition „Optionszeit"}}$$

d.h. in diskreter Zeit fallen die Begriffe „Stoppzeit" und „Optionszeit" (hatten wir im Buch nicht eingeführt, Definition in obiger Formel) zusammen.

(b) Um die Meßbarkeit von Indikatorfunktionen zu testen, reicht es $\{x : \mathbb{1}_A(x) = 1\}$ als messbar zu erkennen (da $\{x : \mathbb{1}_A(x) = 0\} = \{x : \mathbb{1}_A(x) = 1\}^c$ gilt. Mithin

$$\{\omega : \mathbb{1}_{[0,T(\omega))}(n) = 1\} = \{\omega : n \leqslant T(\omega)\} = \{T < n\}^c = \{T \leqslant n-1\}^c \in \mathscr{F}_{n-1}.$$

(c)

$$\left\{\sup_i T_i \leqslant n\right\} = \bigcap_i^{\infty} \{T_i \leqslant n\}$$

und da $T_i : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ – es ist wesentlich, dass die T_i ganzzahlig sind – gilt auch

$$\left\{\inf_i T_i \leqslant n\right\} = \bigcup_i^{\infty} \{T_i \leqslant n\}$$

und die rechten Seiten sind in $\mathscr{F}_n$ und damit sind $\sup_i T_i$ und $\inf_i T_i$ Stoppzeiten.

Achtung: Im allgemeinen gilt lediglich $\{\inf_i f_i \leqslant \lambda\} \supset \bigcup_i \{f_i \leqslant \lambda\}$. Betrachte, z.B. $f_i \equiv i^{-1}$. Dann gilt $\inf_i f_i = 0$, also $\{\inf_i f_i \leqslant 0\} = \Omega$ während $\bigcup_i \{f_i \leqslant 0\} = \emptyset$. Wir erhalten Gleichheit, wenn wir „$< \lambda$" betrachten.

■■

Aufgabe 4.5. Lösung: Mit monotoner Konvergenz erhalten wir

$$\mathbb{E}e^{-cT} = \mathbb{E}(e^{-cT}\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}) + \mathbb{E}(e^{-cT}\mathbb{1}_{\{T=\infty\}}) = \mathbb{E}(e^{-cT}\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}) \xrightarrow[c\downarrow 0]{} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}) = \mathbb{P}(T<\infty).$$

Also Achtung: nie die Möglichkeit $T = \infty$ vergessen!

■■

Aufgabe 4.6. Lösung: Wenn wir $\mathbb{P}(T<\infty) = 1$ wiederum in unsere Rechnungen von Bsp. 4.6 einsetzen, sehen wir

$$\mathbb{E}\cosh^{-T}\xi = e^{-\xi} \xRightarrow[e^{-\xi}=s^{-1}(1-\sqrt{1-s^2})]{2s^{-1}=e^{-\xi}+e^{\xi}=2\cosh\xi} \mathbb{E}s^T = \frac{1}{s}\left(1-\sqrt{1-s^2}\right)$$

was uns dann erlaubt die Verteilung von T zu bestimmen:

$$(1-x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}(-1)^n x^n, \quad |x|<1, \quad \binom{\alpha}{n} := \begin{cases} \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}, & n>0 \\ 1, & n=0 \end{cases}$$

Das können wir folgendermaßen verwenden

$$\frac{1}{s}\left(1-\sqrt{1-s^2}\right) = \frac{1}{s}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n s^{2n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^{n+1}s^{2n-1}$$

was dann durch Koeffizientenvergleich

$$\mathbb{P}(T = 2n-1) = (-1)^{n+1}\binom{\frac{1}{2}}{n}$$

zeigt.

Bemerkung. Vergleichen Sie diese Lösung auch mit „Gambler's Ruin 4" in Kapitel 11, Beispiel 11.10.

Bemerkung. Überlegen Sie sich bitte mal, wie diese Verteilung zustande kommt. Es handelt sich um eine verallgemeinerte geometrische/negative Binomial-Verteilung. Klar ist: Wenn wir in 0 starten und nicht gleich nach 1 gehen, müssen wir eine ,,Schleife“ in der negativen Halbachse mit insgesamt $l = (n-1)$ Schritten nach links und $r = (n-1)$ Schritten nach rechts machen. Damit wir in der linken Halbachse bleiben, muss stets die Zahl der linken Schritte $\leqslant$ Zahl der rechten Schritte gelten, und zum Schluß müssen wir mindestens zwei rechte Schritte machen.

Aufgabe 4.7. Lösung: Um nach 1 zu gelangen, gehen wir entweder direkt nach 1, oder wir gehen erst nach links in den ,,negativen“ Bereich, kehren dann nach 0 zurück (dazu brauche wir eine gerade Anzahl von Schritten!), und gehen dann zur 1. Also brauchen wir ungerade viele Schritte, sagen wir $2n+1$. Von diesen Schritten gehen n nach links und $n+1$ nach rechts, wobei aber der letzte Schritt nach rechts gehen muß. Wenn $n > 1$ muß zudem der erste Schritt nach links gehen, d.h. wir haben nur $2n-1$,,freie“ Schritte, damit ist

$$\mathbb{P}(T=1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(T=3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \mathbb{P}(T=2n+1) = \binom{2n-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

so dass die Behauptung über die SZ richtig ist. Offenbar gilt $\mathbb{P}(T=\infty) = \lim_n \mathbb{P}(T = 2n+1) = 0$, wie man mit Hilfe der Stirlingschen Formel sieht:

$$k! \approx \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}$$

also gilt

$$\begin{aligned}
\binom{2n-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} &\approx \frac{(2n-1)^{2n-1}}{(n-1)^{n-1}n^n}\,\frac{e^{n-1}e^n}{e^{2n-1}}\,\frac{\sqrt{2\pi(2n-1)}}{\sqrt{2\pi(n-1)}\sqrt{2\pi n}}2^{-n-1} \\
&= \left(\frac{2n-1}{n-1}\right)^{n-1}\left(\frac{2n-1}{n}\right)^n \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n-1}\sqrt{n}}2^{-n-1} \\
&= \left(2+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(2-\frac{1}{n}\right)^n \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n-1}\sqrt{n}}2^{-n-1} \\
&= \left(1+\frac{1/2}{n-1}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1/2}{n}\right)^n \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n-1}\sqrt{n}}2^{-2} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{1/2}\cdot e^{-1/2}\cdot 0\cdot\frac{1}{4} = 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.8. Lösung:

(a) $\Omega \in \mathscr{F}_\infty$, denn $\mathscr{F}_\infty$ ist eine σ-Algebra.

$\Omega \cap \{T \leqslant n\} = \{T \leqslant n\} \in \mathscr{F}_n$, denn T ist eine Stoppzeit. Und damit $\Omega \in \mathscr{F}_T$.

(b) Sei $A \in \mathscr{F}_T$. Dann $A^c \in \mathscr{F}_\infty$, denn $\mathscr{F}_\infty$ ist eine σ-Algebra.

Nun gilt auch

$$(A \cup \{T > n\}) = ((A \cup \{T > n\}) \cap \Omega) = (A \cap \{T \leqslant n\}) \cup \{T > n\}) \in \mathscr{F}_n$$

und damit $A^c \cap \{T \leqslant n\} = (A \cup \{T > n\})^c \in \mathscr{F}_n$. Also ist $A^c \in \mathscr{F}_T$.

(c) $A_i \in \mathscr{F}_T \;\Rightarrow\; \bigcup_i A_i \in \mathscr{F}_\infty$ und

$$\Big(\bigcup_i A_i\Big) \cap \{T \leqslant n\} = \bigcup_i \big(A_i \cap \{T \leqslant n\}\big) \in \mathscr{F}_n.$$

Und daher $\bigcup_i A_i \in \mathscr{F}_\infty$.

Also ist $\mathscr{F}_T$ eine σ-Algebra.

Aufgabe 4.9. Lösung: Weil $\{S \leqslant T\} = \{S > T\}^c$ und $\{S = T\} = \{S \leqslant T\} \setminus \{S < T\}$ gilt, reicht es, die Behauptung für $\{S < T\}$ zu zeigen. Wir folgen dem Hinweis und schreiben

$$\begin{aligned}
\{S < T\} \cap \{S \leqslant k\} &= \dot{\bigcup_{i=0}^{\infty}} \{S < T\} \cap \{S \leqslant k\} \cap \{S = i\} \\
&= \dot{\bigcup_{i=0}^{k}} \{S < T\} \cap \{S = i\} \\
&= \dot{\bigcup_{i=0}^{k}} \{i < T\} \cap \{S = i\} \\
&= \dot{\bigcup_{i=0}^{k}} \{T \leqslant i\}^c \cap \{S = i\} \in \mathscr{F}_k
\end{aligned}$$

da wir $\{T \leqslant i\}^c \in \mathscr{F}_i \subset \mathscr{F}_k$, $\{S = i\} \in \mathscr{F}_i \subset \mathscr{F}_k$ haben. Es folgt, dass $\{S < T\} \in \mathscr{F}_S$. Analog sehen wir

$$\begin{aligned}
\{S < T\} \cap \{T \leqslant k\} &= \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} \{S < T\} \cap \{T \leqslant k\} \cap \{T = i\} \\
&= \dot{\bigcup_{i=1}^{k}} \{S < T\} \cap \{T = i\} \\
&= \dot{\bigcup_{i=1}^{k}} \{S < i\} \cap \{T = i\} \\
&= \dot{\bigcup_{i=1}^{k}} \{(i-1) \leqslant S\}^c \cap \{T = i\} \in \mathscr{F}_k
\end{aligned}$$

da alle Mengen auf der rechten Seite in $\mathscr{F}_{i-1} \subset \mathscr{F}_k$ bzw. $\mathscr{F}_i \subset \mathscr{F}_k$ sind. Es folgt, dass $\{S < T\} \in \mathscr{F}_T$.

Aufgabe 4.10. Lösung: Es sei $F \in \mathscr{F}_T$. Dann gilt $F \cap \{T = n\} \in \mathscr{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (und damit auch $F \cap \{T = \infty\} \in \mathscr{F}_\infty$). Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_F X \, d\mathbb{P} &= \int_F \sum_{n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \mathbb{1}_{\{T=n\}} \cdot X \, d\mathbb{P} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \int_F \mathbb{1}_{\{T=n\}} \cdot X \, d\mathbb{P} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \int_{F \cap \{T=n\}} X \, d\mathbb{P} \\
&\overset{F \cap \{T=n\} \in \mathscr{F}_n}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \int_{F \cap \{T=n\}} \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_n) \, d\mathbb{P} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \int_F \mathbb{1}_{\{T=n\}} \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_n) \, d\mathbb{P} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \int_F \mathbb{1}_{\{T=n\}} \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_n) \, d\mathbb{P} \\
&= \int_F \sum_{n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \mathbb{1}_{\{T=n\}} \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_n) \, d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

und daraus folgt die Behauptung.

■■

Aufgabe 4.11. Lösung: Folgt unmittelbar aus Satz 4.10 (optional stopping), wobei wir rekursiv $S \rightsquigarrow T \wedge n - 1$ und $T \rightsquigarrow T \wedge n$ verwenden.

Offensichtlich benötigt man die Endlichkeit der SZ nicht!

Alternative Lösung: Achtung: Satz 4.4 hat die „falsche“ Filtration! Hier sollten wir mit Satz 4.7 folgendermaßen argumentieren: Die ZV $T_n := T \wedge n$ sind f.s. endliche SZ, d.h. nach Satz 4.10 gilt $X_{T_n} \leqslant \mathbb{E}(X_{T_{n+1}} \mid \mathscr{F}_{T_n})$ und nach Satz 4.7 ist $X_{T_n} \in L^1$. Wir sollten uns noch Adaptiertheit überlegen. Dazu ist zu zeigen, dass X_{T_n} $\mathscr{F}_{T_n}$-mb ist. Das geht so:

$$\{X_{T_n} \in B\} \cap \{T_n \leqslant N\} = \bigcup_{i=0}^N \{X_{T_n} \in B\} \cap \{T_n = i\} = \bigcup_{i=0}^N \underbrace{\{X_i \in B\} \cap \{T_n = i\}}_{\in \mathscr{F}_i \subset \mathscr{F}_N} \in \mathscr{F}_N$$

und daher ist $\{X_{T_n} \in B\} \in \mathscr{F}_{T_n}$.

■■

Aufgabe 4.12. Lösung: Es gilt

$$\mathbb{E}T = \sum_{i=1}^\infty i\mathbb{P}(T = i) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \mathbb{P}(T = i) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=k}^\infty \mathbb{P}(T = i) = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(T \geqslant k).$$

■■

Aufgabe 4.13. Lösung:

(a) Wir haben für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\{X_T \in B\} \cap \{T \leqslant n\} = \bigcup_{i=0}^n \{X_T \in B\} \cap \{T = i\} = \bigcup_{i=0}^n \underbrace{\{X_i \in B\} \cap \{T = i\}}_{\in \mathscr{F}_i \subset \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n.$$

Das beweist $\{X_T \in B\} \in \mathscr{F}_T$.

(b) Offenbar gilt $C_n(\omega) = \mathbb{1}_{[0,T(\omega)]}(n) = \mathbb{1}_{\{T\geqslant n\}}(\omega)$ und nach Teil (b) ist $\{T \geqslant n\} \in \mathscr{F}_{n-1}$. Damit ist es vorhersagbar. Weiter ist $C_n(\omega) = \mathbb{1}_{[n,\infty)}(T(\omega)) = \mathbb{1}_{[0,T(\omega)]}(n)$ und es gilt

$$\begin{aligned} C \bullet X_n &= \sum_{i=1}^n C_i(X_i - X_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0,T(\omega)]}(i)(X_i - X_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n\wedge T(\omega)} (X_i - X_{i-1}) \\ &= X_n^T - X_0. \end{aligned}$$

■■

Aufgabe 4.14. Lösung: **Satz.** *Es sei $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset L^1$ adaptiert. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ist ein Martingal;*

(b) $\mathbb{E}X_S = \mathbb{E}X_T$ *für alle f.s. beschränkten Stoppzeiten* $S \leqslant T$*;*

(c) $\int_F X_S\,d\mathbb{P} = \int_F X_T\,d\mathbb{P}$, $F \in \mathscr{F}_S$, *für alle f.s. beschränkten Stoppzeiten* $S \leqslant T$*;*

(d) $X_S = \mathbb{E}(X_T \mid \mathscr{F}_S)$ *für alle f.s. beschränkten Stoppzeiten* $S \leqslant T$*.*

Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 4.10 im Buch.

■■

Aufgabe 4.15. Lösung: Wir überlegen uns zunächst, dass wir für ein L^2-MG Y stets $\langle Y^T\rangle = \langle Y\rangle^T$ für alle Stoppzeiten T haben. Das folgt unmittelbar aus der Definition von $\langle\bullet\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle Y^T\rangle_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}((Y_i^T)^2 - (Y_{i-1}^T)^2 \mid \mathscr{F}_{i-1}) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_{i\wedge T}^2 - Y_{(i-1)\wedge T}^2 \mid \mathscr{F}_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n\wedge T} \mathbb{E}(Y_i^2 - Y_{i-1}^2 \mid \mathscr{F}_{i-1}) = \langle Y\rangle_n^T. \end{aligned}$$

Nun sei X ein lokales MG mit lokalisierender Folge $(T_k)_k$. OE sei $X_0 = 0$.

Eindeutigkeit. Wir nehmen an, dass es zwei vorhersagbare, wachsende Prozesse A und B gibt, so dass $X^2 - A$ und $X^2 - B$ lokale MG sind. Wenn $(\tau_k)_k$ und $(\sigma_k)_k$ jeweils die lokalisierenden Folgen sind, dann ist $R_k := \tau_k \wedge \sigma_k$ eine gemeinsame lokalisierende Folge, und wir erhalten, dass

$$A_n - B_n = X_n^2 - B_n - X_n^2 + A_n \quad \text{ist ein lokales MG und } A_n - B_n \text{ ist } \mathscr{F}_{n-1}\text{-messbar.}$$

Wir erhalten also

$$A_{n\wedge R_k} - B_{n\wedge R_k} \underset{\text{pull out}}{\overset{\text{vorhersagbar}}{=}} \mathbb{E}\left(A_{n\wedge R_k} - B_{n\wedge R_k} \mid \mathscr{F}_{n-1}\right) \overset{\text{MG}}{=} A_{(n-1)\wedge R_k} - B_{(n-1)\wedge R_k}$$

und, indem wir diese Gleichheit iterieren, folgt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$A_{n\wedge R_k} - B_{n\wedge R_k} = A_{0\wedge R_k} - B_{0\wedge R_k} = 0 \implies A_{n\wedge R_k} = B_{n\wedge R_k} \quad \forall n, k$$

und daher $\mathbb{P}(A_i = B_i \quad \forall i) = 1$.

Existenz. Es sei $(T_k)_k$ eine lokalisierende Folge für X. Aus der Vorbemerkung wissen wir, dass für $k \leqslant l$

$$\langle X^{T_l}\rangle_n^{T_k} = \langle X^{T_l\wedge T_k}\rangle_n \overset{T_k\leqslant T_l}{=} \langle X^{T_k}\rangle_n$$

daher ist der Prozess

$$\langle X\rangle_n := \langle X^{T_k}\rangle_n \quad \text{wenn} \quad n \leqslant T_k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ wohldefiniert. Außerdem gilt

$$\langle X\rangle_n^{T_k} = \langle X^{T_k}\rangle_n$$

d.h. $\langle X\rangle$ macht $X^2 - \langle X\rangle$ zu einem lokalen MG.

Stopp-Eigenschaft. Sei T eine Stoppzeit. Dann gilt für alle $n \leqslant T_k$

$$\langle X\rangle_n^T = \langle X^{T_k}\rangle_n^T \overset{\text{Vorbem.}}{=} \langle X^{T_k\wedge T}\rangle_n \overset{\text{Vorbem.}}{=} \langle (X^T)^{T_k}\rangle_n = \langle X^T\rangle_n$$

wobei wir in der letzten Gleichheit die Def. von $\langle X^T\rangle$ verwenden. Da k beliebig ist, folgt $\langle X\rangle^T = \langle X^T\rangle$.

■■

Aufgabe 4.16. Lösung: Wegen $X_n \uparrow X$ f.s. gilt $\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}) \leqslant \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F})$, und der Grenzwert

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}) \in [0, \infty]$$

existiert f.s. Nun sei $Y_m \uparrow X$ eine weitere approximierende Folge. Weil $X_n, Y_m \in L^1$, können wir die bedingte Version des Satzes von Beppo Levi für die Folge $(X_n \wedge Y_m)_m$ verwenden, und erhalten

$$\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}) = \mathbb{E}(X_n \wedge X \mid \mathscr{F}) = \mathbb{E}(X_n \wedge \sup_m Y_m \mid \mathscr{F}) \overset{\text{bBL}}{=} \sup_m \mathbb{E}(X_n \wedge Y_m \mid \mathscr{F}) \leqslant \sup_m \mathbb{E}(Y_m \mid \mathscr{F}).$$

Damit folgt $\sup_n \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}) \leqslant \sup_m \mathbb{E}(Y_m \mid \mathscr{F})$. Nun tauschen wir die Rollen von X_n und Y_m und wir erhalten $\sup_n \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}) = \sup_m \mathbb{E}(Y_m \mid \mathscr{F})$.

■■

5 Konvergenz von Martingalen

Aufgabe 5.1. Lösung: Da $S \equiv N$ eine SZ ist, reicht es aus zu beweisen, dass

$$\sigma_\ell := \min\{i > \tau_{\ell-1} \,:\, X_i < a\}$$

eine SZ ist, wenn wir schon wissen, dass $\tau_{\ell-1}$ eine SZ ist. (Das ist o.k., wir können uns rekursiv "hochhangeln", da auch $T_0 \equiv 0$ eine SZ ist. Der Beweis für τ_ℓ ist dann sehr ähnlich.

Nunmehr gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\{\sigma_\ell = n\}\\
&= \{n > \tau_{\ell-1}\} \cap \{X_{\tau_{\ell-1}+1} \geqslant a\} \cap \{X_{\tau_{\ell-1}+2} \geqslant a\} \cap \cdots \cap \{X_{n-1} \geqslant a\} \cap \{X_n < a\}\\
&= \bigcup_{k=0}^{n-1} \{\tau_{\ell-1} = k\} \cap \{X_{k+1} \geqslant a\} \cap \{X_{k+2} \geqslant a\} \cap \cdots \cap \{X_{n-1} \geqslant a\} \cap \{X_n < a\}
\end{aligned}$$

und jede der Mengen auf der r.S. ist $\in \mathscr{F}_n$, da X_k adaptiert ist.

■■

Aufgabe 5.2. Lösung: Angenommen, $X_n \to Z'$ in L^1 für eine ZV Z'. Wir überlegen uns zunächst, dass $Z = Z'$ f.s. gelten muß.

Weg 1: Es gilt $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} Z$ und damit $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z$. Andererseits gilt auch $X_n \xrightarrow{L^1} Z'$ und damit $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z'$. Weil die $\mathbb{P}$-Limiten eindeutig sind, folgt $Z = Z'$ f.s.

Weg 2: Es gilt $X_n \xrightarrow{L^1} Z'$ und damit $X_{n(k)} \xrightarrow{\text{f.s.}} Z'$ für eine Teilfolge. Andererseits gilt wegen $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} Z$ für die eben konstruierte Teilfolge auch $X_{n(k)} \xrightarrow{\text{f.s.}} Z$. Weil aber f.s. Limiten eindeutig sind, folgt $Z = Z'$ f.s.

Wir wissen nun, dass $\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}Z$ konvergiert, da

$$|\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}Z| = |\mathbb{E}(X_n - Z)| \leqslant \mathbb{E}|X_n - Z| \xrightarrow{L^1\text{Konvergenz}} 0$$

was zum Widerspruch führt.

■■

Aufgabe 5.3. Lösung:

(a) Es gilt für $B \in \mathscr{B}[0,1)$

$$\mathbb{P}(X_n \in B) = \sum_{i=1}^{2^n} (i-1)2^{-n}\lambda(B \cap [(i-1)2^{-n}, i2^{-n})\,,$$

wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet.

$\mathscr{F}_n$ ist die kleinste σ-Algebra, die alle halboffenen Intervalle der Form $[(i-1)2^{-k}, i2^{-k})$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$ und $k = 1, \dots, n$ enthält. Weil wir Intervalle der Länge 2^{-k}, $k < n$, aus (endlichen Vereinigungen von) Intervallen der σ-Algebra $\sigma(X_n)$ erzeugen können, gilt $\mathscr{F}_n = \sigma(X_n)$.

Bemerkung: $\mathscr{F}_\infty = \sigma(\bigcup_n \mathscr{F}_n)$ wird von allen dyadischen Intervallen $[a, b)$, a, b sind Zahlen der Gestalt $i2^{-k}$, erzeugt. Da die dyadischen Zahlen dicht in $[0, 1)$ sind, folgt $\mathscr{F}_\infty = \mathscr{B}[0, 1)$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(M_{n+1} \mid \mathscr{F}_n\right)\\
&= 2^{n+1}\mathbb{E}\left(f(X_{n+1} + 2^{-n-1}) - f(X_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n\right)\\
&= 2^{n+1}\mathbb{E}\left(f(X_{n+1} + 2^{-n-1}) - f(X_{n+1}) \mid X_n\right)
\end{aligned}$$

beachte: $\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n \mid X_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = X_n + 2^{-n-1} \mid X_n) = \frac{1}{2}$, d.h.

$$\begin{aligned}
&= 2^{n+1}\left(\frac{1}{2}\left[f(X_n + 2^{-n-1}) - f(X_n)\right] + \frac{1}{2}\left[f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n + 2^{-n-1})\right]\right)\\
&= 2^n \left[f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)\right] = M_n.
\end{aligned}$$

(c) Wenn f Lipschitz-stetig ist, dann existiert eine Konstante L, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in [0, 1).$$

Das bedeutet, dass das Martingal $(M_n, \mathscr{F}_n)_n$ uniform beschränkt ist, insbesondere ist also die Integrabilitätsedingung des Martingalkonvergenzsatzes (Satz 5.3, Korollar 5.5) erfüllt, und es folgt, dass $M_n \to M_\infty$ f.s. Somit gilt

$$M_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)}{2^{-n}}$$

Wir bestimmen nun diesen Grenzwert. Weil M_n gleichmäßig beschränkt ist, können wir dominierte Konvergenz verwenden. Es sei d eine rationale dyadische Zahl (d.h. von der Form $k/2^m$), dann gilt für große $n \gg 1$

$$\begin{aligned}
\int_{[0,d)} M_\infty d\omega &= \lim_n \int_{[0,d)} \frac{f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)}{2^{-n}} d\omega\\
&= \lim_n \sum_{i:i/2^n \leqslant d} [f(i2^{-n}) - f(f((i-1)2^{-n})]\\
&= f(d) - f(0),
\end{aligned}$$

also ist $M_\infty = f'$ fast überall.

Bemerkung. In Kapitel 7 werden wir sehen, dass M_∞ das Martingal $(M_n)_n$ nach rechts abschließt, d.h. es gilt $\mathbb{E}(M_\infty \mid \mathscr{F}_n) = M_n$ und die eben angestellte Rechnung wird damit überflüssig. Interessant ist, dass der entsprechende abstrakte Beweis im Kapitel 7 dem hier gemachten Beweis nicht unähnlich ist.

Aufgabe 5.4. Lösung:

(a) Der Prozeß $(\langle M\rangle_{n\wedge T})_n$ ist $= 0$ für $n = 0$, wachsend und vorhersagbar, d.h. $\langle M\rangle_{n\wedge T}$ ist $\mathscr{F}_{n-1}$-messbar. Tatsächlich:

$$\langle M\rangle_{n\wedge T} = \sum_{k=0}^{n-1} \langle M\rangle_k \mathbb{1}_{\{T=k\}} + \langle M\rangle_n \mathbb{1}_{\{T\leqslant n-1\}^c}$$

und alle Ausdrücke oben sind $\mathscr{F}_{n-1}$-messbar und integrierbar.

Weiter ist nach Voraussetzung $(M_n^2 - \langle M\rangle_n, \mathscr{F}_n)_n$ ein MG und nach optional stopping ist dann aber auch $(M_{n\wedge T}^2 - \langle M\rangle_{n\wedge T}, \mathscr{F}_n)_n$ ein MG. Da der Kompensator nach der Doob-Zerlegung eindeutig ist, folgern wir $\langle M^T\rangle_n = \langle M\rangle_{n\wedge T} \quad \big(\dots = \langle M\rangle_n^T\big)$.

(b) Wir haben

$$\begin{aligned}\{T_a = n\} &= \{\langle M\rangle_1 \leqslant a, \dots, \langle M\rangle_n \leqslant a, \langle M\rangle_{n+1} > a\}\\ &= \{\langle M\rangle_1 \leqslant a\} \cap \dots \cap \{\langle M\rangle_n \leqslant a\} \cap \{\langle M\rangle_{n+1} > a\} \in \mathscr{F}_n\end{aligned}$$

da $(\langle M\rangle_n)_n$ vorhersagbar ist.

(c) Aus Teil (a) wissen wir, dass

$$\mathbb{E}\big((M_n^{T_a})^2 - \langle M^{T_a}\rangle_n\big) \overset{\text{MG}}{=} \mathbb{E}\big((M_0^{T_a})^2 - \langle M^{T_a}\rangle_0\big) = 0$$

und damit

$$\mathbb{E}\big((M_n^{T_a})^2\big) = \mathbb{E}\left(\langle M\rangle_{n\wedge T_a}\right) \leqslant a$$

wobei wir die Def. von T_a verwendet haben. Damit ist das MG $(M_n^{T_a})_n$ L^2-beschränkt und somit (nach dem L^2-MG-Konvergenzsatz) konvergent in L^2 und fast sicher.

(d) Nach Teil (c) gilt, dass $(M_n)_n$ f.s. für alle $\omega \in \{T_a = \infty\}$ konvergiert. Es gilt nämlich, dass

$$\forall \omega \in \{T_a = \infty\} \;:\; M_n(\omega) = M_{n\wedge T_a}(\omega)$$

d.h. für festes $\omega \in \{T_a < \infty\}$ stimmen die Folgen überein und haben dasselbe Konvergenzverhalten. Beachte noch, dass

$$\big\{\langle M\rangle_\infty < \infty\big\} = \bigcup_{a\in\mathbb{N}} \{T_a = \infty\}.$$

Aufgabe 5.5. Lösung:

(a) Wir finden durch quadratische Ergänzung

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{uY_1} &= \int_{\mathbb{R}} e^{ux} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}+\frac{2}{2}ux-\frac{\sigma^2u^2}{2}}\,dx \cdot e^{\frac{\sigma^2u^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}-\sigma u\right)^2}\,dx \cdot e^{\frac{\sigma^2u^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(y-\sigma u)^2}\,dy \cdot e^{\frac{\sigma^2u^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy \cdot e^{\frac{\sigma^2u^2}{2}} = e^{\frac{\sigma^2u^2}{2}}.
\end{aligned}$$

(b) Da $Y_n \perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_{n-1}$, finden wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n^u \mid \mathscr{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}\left(\exp\left(uX_n - nu^2\sigma^2/2\right) \mid \mathscr{F}_{n-1}\right) \\
&= \exp\left(uX_{n-1} - nu^2\sigma^2/2\right)\mathbb{E}\left(\exp\left(uY_n\right) \mid \mathscr{F}_{n-1}\right) \\
&\overset{\text{u.a.}}{=} \exp\left(uX_{n-1} - nu^2\sigma^2/2\right)\mathbb{E}\left(\exp\left(uY_n\right)\right) \\
&\overset{\text{(a)}}{=} \exp\left(uX_{n-1} - nu^2\sigma^2/2\right)e^{u^2\sigma^2/2} \;=\; Z_{n-1}^u.
\end{aligned}$$

(c) Da Z_n^u ein *positives (!)* MG (und damit auch super-MG) ist, konvergiert Z_n^u fast sicher gegen einen Grenzwert $Z_\infty^u \in \mathbb{R}$ (MG-Konvergenzsatz). Andererseits wissen wir vom starken Gesetz der großen Zahl

$$\lim_n \frac{X_n}{n} = 0 \implies \lim_n \frac{1}{n}\left(uX_n - \frac{nu^2\sigma^2}{2}\right) = \frac{-u^2\sigma^2}{2} < 0.$$

fast sicher. Damit gilt für $u \neq 0$

$$\lim_n \left(uX_n - \frac{nu^2\sigma^2}{2}\right) = -\infty$$

und somit

$$Z_\infty^u = \lim_n Z_n^u = 0 \qquad \forall u \neq 0.$$

Da dann $\mathbb{E}(Z_\infty^u \mid \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(0 \mid \mathscr{F}_n) = 0 \neq Z_n^u$ kann $(Z_n^u)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ für $u \neq 0$ kein MG sein. Ist $u = 0$, dann ist $Z_n^{u=0} \equiv 1$ und $Z_\infty^{u=0} = 1$, d.h. alles ist trivial.

■■

Aufgabe 5.6. Lösung:

(a) Es genügt zu zeigen: $\sigma(S_n, S_{n+1}) = \sigma(S_n, \xi_{n+1})$ dann folgt die Aussage induktiv. $\sigma(S_n, S_{n+1})$ wird erzeugt von $\mathcal{E} := \{\{S_n \leqslant x\}, \{S_{n+1} \leqslant y\},\ x, y \in \mathbb{Q}\}$ und $\sigma(S_n, \xi_{n+1})$ wird erzeugt von $\mathcal{E}' := \{\{S_n \leqslant x\}, \{\xi_{n+1} \leqslant y\},\ x, y \in \mathbb{Q}\}$. Nun gilt

$$\{S_{n+1} \leqslant y\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \left(\{S_n \leqslant q\} \cap \{\xi_{n+1} \leqslant y - q\}\right) \in \sigma(\mathcal{E}')$$

und

$$\{\xi_{n+1} \leqslant y\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{S_{n+1} \leqslant q\} \cap \{-S_n \leqslant y - q\}) \in \sigma(\mathcal{E}).$$

Daraus folgt
$(E \in \mathcal{E} \ \Rightarrow E \in \sigma(\mathcal{E}')) \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E}')$
$(E' \in \mathcal{E}' \ \Rightarrow E' \in \sigma(\mathcal{E})) \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}') \subset \sigma(\mathcal{E})$
und damit $\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}')$.

Etwas kürzer: $\alpha(x, y) := y - x$ ist offenbar eine Borel-messbare Funktion. Nun gilt für eine typische Erzeugermenge von $\sigma(S_n, \xi_{n+1})$:

$$\begin{aligned}
\{S_n \leqslant s\} \cap \{\xi_{n+1} \leqslant x\} &= \{S_n \leqslant s\} \cap \{S_{n+1} - S_n \leqslant x\} \\
&= \{S_n \leqslant s\} \cap \{\alpha(S_n, S_{n+1}) \leqslant x\} \\
&= S_n^{-1}(-\infty, s] \cap \alpha(S_n, S_{n+1})^{-1}(-\infty, x] \\
&\in \sigma(S_n) \cap \sigma(S_n, S_{n+1}) \subset \sigma(S_n, S_{n+1})
\end{aligned}$$

Daraus folgt Erzeuger von$(\sigma(S_n, \xi_{n+1})) \subset \sigma(S_n, S_{n+1})$, d.h. $\sigma(S_n, \xi_{n+1}) \subset \sigma(S_n, S_{n+1})$ und die umgekehrte Inklusion folgt entsprechend.

(b) $\sigma(\xi_{n+l})$ ist für alle $l \in \mathbb{N}$ unabhängig von $\sigma(\sigma(\xi_1) \cup \sigma(S_n))$ und damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.7 erfüllt und es gilt

$$\mathbb{E}(\xi_1 \mid \mathscr{G}_n) = \mathbb{E}(\xi_1 \mid S_n).$$

(c)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\xi_1 \mathbb{1}_B(S_n)) \\
&= \int \cdots \int \mathbb{1}_B(t_1 + \ldots + t_n) t_1 \, \mathbb{P}(\xi_1 \in dt_1) \cdots \mathbb{P}(\xi_n \in dt_n) \\
&= \int \cdots \int \mathbb{1}_B(t_1 + \ldots + t_n) t_1 \, \mathbb{P}(\xi_i \in dt_1) \mathbb{P}(\xi_2 \in dt_2) \ldots \mathbb{P}(\xi_1 \in dt_i) \ldots \mathbb{P}(\xi_n \in dt_n) \\
&= \mathbb{E}(\xi_i \mathbb{1}_B(S_n))
\end{aligned}$$

(d) Aus (c) folgt auf Grund der Definition der bedingten Erwartung

$$\mathbb{E}(\xi_i \mid S_n) = \mathbb{E}(\xi_k \mid S_n) \ \forall k, i.$$

Nun gilt mit Meßbarkeit und Linearität:

$$S_n = \mathbb{E}(S_n \mid S_n) = \mathbb{E}(\xi_1 \mid S_n) + \ldots + \mathbb{E}(\xi_n \mid S_n) = n\mathbb{E}(\xi_i \mid S_n)$$

und damit folgt die Behauptung.

■■

Aufgabe 5.7. Lösung: Wir definieren $C := \{\exists \lim_n X_n \in \mathbb{R}\}$. Weil X^{T_k} für jedes k ein sub-MG ist (optional stopping), das den Bedingungen des MG-Konvergenzsatzes (Satz 5.3) genügt, haben wir

$$C_k := \{\exists \lim_n X_{n\wedge T_k} \in \mathbb{R}\} \overset{5.3}{\Longrightarrow} \mathbb{P}(C_k) = 1.$$

Nun gilt aber $X = X^{T_k}$ auf der Menge $\{T_k = \infty\}$, also gilt

$$\{T_k = \infty\} \cap C_k \subset C \implies \mathbb{P}(\{T_k = \infty\} \cap C^c) \overset{\mathbb{P}(C_k)=1}{=} \mathbb{P}(\{T_k = \infty\} \cap C_k \cap C^c) = 0.$$

Andererseits haben wir auch

$$\mathbb{P}\left(C^c \cap \bigcup_{k=1}^{\infty}\{T_k = \infty\}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(C^c \cap \{T_k = \infty\}\right) = 0.$$

Mithin $\bigcup_k \{T_k = \infty\} \subset C$.

■■

Aufgabe 5.8. Lösung: Das folgt unmittelbar aus den nachfolgenden Inklusionen:

$$\{\exists \lim_n X_n \in \mathbb{R}\} \subset \{\sup_n |X_n| < \infty\} \subset \{\sup_n X_n < \infty\}.$$

■■

Aufgabe 5.9. Lösung: Wir schreiben $n = T(r)$ und c für die Schranke der Zuwächse $|X_i - X_{i-1}|$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|X_n^2 - X_{n-1}^2| &= |(X_n - X_{n-1})^2 + 2X_{n-1}(X_n - X_{n-1})| \\
&\leqslant |(X_n - X_{n-1})^2| + 2|X_{n-1}||X_n - X_{n-1}| \\
&\leqslant (c + 2\sqrt{r})|X_n - X_{n-1}|
\end{aligned}$$

Woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

■■

Aufgabe 5.10. Lösung: Wir wählen $M_1 := 0$, $M_n := M_{n-1} - (n^2 - 1) + Y_n$, wobei die Y_n die ZV aus dem Hinweis sind. Es gilt $\mathbb{E}Y_n = n^2 - 1$, also $\mathbb{E}[M_n \mid \mathscr{F}_{n-1}] = M_{n-1}$. Setze $D := \{\lim_n M_n = +\infty\}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(D) \geqslant \prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} > 0.$$

Den Grenzwert für das unendliche Produkt sieht man so: Es $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ und

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

Weil D eine terminale Menge ist (im Sinne des Kolmogorovschen-Null-Eins Gesetzes), folgt $\mathbb{P}(D) = 1$.

Beachte. Das von uns konstruierte Martingal erfüllt offensichtlich nicht die Bedingung (5.4).

Lösungsalternative:[1] $M_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ wobei die Y_k unabhängige ZV mit folgender Verteilung sind:

$$P(Y_k = 1) = 1 - 2^{-k} \quad \text{und} \quad P(Y_k = 1 - 2^k) = 2^{-k}$$

Offensichtlich gilt $\mathbb{E}Y_k = 0$. Mit Hilfe des Borel-Cantelli Lemmas sieht man, daß $Y_k \neq 1$ für höchstens endlich viele k mit Wahrscheinlichkeit 1 gelten kann, also gilt $M_n \to \infty$ f.s.

■■

Aufgabe 5.11. Lösung: Wir folgen dem Hinweis und setzen

$$M_n := \prod_{i=2}^n X_n.$$

Weil die ZV X_i unabhängig sind und $\mathbb{E}X_i = 1$ erfüllen, ist M_n tatsächlich ein MG. Mit dem Borel–Cantelli Lemma sehen wir, dass $\mathbb{P}(X_i \neq 0 \quad \text{für unendl. viele } i) = 0$, d.h. wir haben $\lim_n M_n = 0$ f.s. Andererseits gilt auch

$$M_n^+ \geqslant \prod_{i=2}^n X_i^+ \implies \mathbb{E}[M_n^+] \geqslant \prod_{i=2}^n \mathbb{E}[X_i^+] = \prod_{i=2}^n i^2 = (n!)^2 \to \infty.$$

■■

[1] Wurde mir von Frau Dr. Franziska Kühn mitgeteilt

6 L^2-Martingale

Aufgabe 6.1. Lösung:

(a) $\mathscr{F}_n := \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Offensichtlich ist X_n integrierbar und $\mathscr{F}_n$-messbar. Außerdem gilt

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(X_n + \xi_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = \underbrace{\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_n)}_{=X_n \text{ da } \mathscr{F}_n\text{-mb}} + \underbrace{\mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)}_{=\mathbb{E}\xi_{n+1} \text{ da unabh.}} = X_n + \mathbb{E}\xi_{n+1} = X_n.$$

(b) $\mathscr{F}_n$ wie oben. X_n ist L^2, da es eine Summe von L^2-ZV ist, d.h. $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$; die $\mathscr{F}_n$-Meßbarkeit ist offensichtlich. Wir folgen dem Hinweis:

$$\begin{aligned} X_{n+1}^2 - (n+1) - (X_n^2 - n) &= X_{n+1}^2 - X_n^2 - 1 \\ &= (X_n + \xi_{n+1})^2 - X_n^2 - 1 \\ &= X_n^2 + 2X_n\xi_{n+1} + \xi_{n+1}^2 - 1 \end{aligned}$$

und daher mit pull-out und Unabhängigkeit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}^2 - (n+1) - (X_n^2 - n) \mid \mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}(2X_n\xi_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) + \mathbb{E}(\xi_{n+1}^2 \mid \mathscr{F}_n) - 1 \\ &= 2X_n\mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) + \mathbb{E}(\xi_{n+1}^2) - 1 \\ &= 2X_n\mathbb{E}(\xi_{n+1}) + 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Das zeigt dann $\mathbb{E}(X_{n+1}^2 - (n+1) - (X_n^2 - n) \mid \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}^2 - (n+1) \mid \mathscr{F}_n) - (X_n^2 - n) = 0$.

Alternative (direkte Rechnung):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}^2 - (n+1) \mid \mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}((X_n + \xi_{n+1})^2 - (n+1) \mid \mathscr{F}_n) \\ &= \mathbb{E}(X_n^2 + 2X_n\xi_{n+1} + \xi_{n+1}^2 - (n+1) \mid \mathscr{F}_n) \\ &= X_n^2 + \underbrace{2X_n\mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)}_{\text{pull out}} + \mathbb{E}(\xi_{n+1}^2 \mid \mathscr{F}_n) - (n+1) \\ &= X_n^2 + 2X_n \underbrace{\mathbb{E}(\xi_{n+1}) + \mathbb{E}(\xi_{n+1}^2)}_{\text{Unabhängigkeit}} - (n+1) \\ &= X_n^2 + 2X_n \cdot 0 + 1 - n - 1 = X_n^2 - n. \end{aligned}$$

(c) Mess- und Integrierbarkeit wie in voriger Teilaufgabe. Wir folgen dem Hinweis

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 + \xi_{n+1}^2 - n - 1 \mid \mathscr{F}_n) &= \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 + \mathbb{E}(\xi_{n+1}^2 \mid \mathscr{F}_n) - n - 1 \\ &= A_n + \mathbb{E}(\xi_{n+1}^2) - n - 1 = A_n - n \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}^2 - A_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}(X_{n+1}^2 - (n+1) \mid \mathscr{F}_n) + \mathbb{E}(n+1-A_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)\\ &= X_n - n + n - A_n.\end{aligned}$$

Alternative (direkte Rechnung):

$$\begin{aligned}X_{n+1}^2 - A_{n+1} - (X_n^2 - A_n) &= X_{n+1}^2 - X_n^2 - \xi_{n+1}^2\\ &= (X_n + \xi_{n+1})^2 - X_n^2 - \xi_{n+1}^2\\ &= X_n^2 + 2X_n\xi_{n+1} + \xi_{n+1}^2 - \xi_{n+1}^2 = 2X_n\xi_{n+1}\end{aligned}$$

und daher mit pull-out und Unabhängigkeit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}^2 - A_{n+1} - (X_n^2 - A_n) \mid \mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}(2X_n\xi_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)\\ &= 2X_n\mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = 2X_n\mathbb{E}(\xi_{n+1}) = 0.\end{aligned}$$

Das zeigt dann $\mathbb{E}(X_{n+1}^2 - A_{n+1} - (X_n^2 - A_n) \mid \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}^2 - A_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) - (X_n^2 - A_n) = 0$.

(d) Satz (Doob-Zerlegung): Es sei ξ_n ein sub-Martingal bezüglich der Filtration $\mathscr{F}_n$. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung der Form $\xi_n = \xi_0 + M_n + A_n$ in ein Martingal M_n (mit $M_0 = 0$) bezüglich $\mathscr{F}_n$ und einen vorhersagbaren (d.h. A_n ist $\mathscr{F}_{n-1}$-mb, $n \in \mathbb{N}$) und wachsenden Prozess $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_0 = 0$.

Zusammenhang zu b) und c): Obschon X_n^2 ein sub-Martingal ist und wir zwei Möglichkeiten gefunden haben, $X_n^2 - C_n$ zu einem Martingal zu machen – nämlich $C_n = n$ und $C_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ – erfüllt nur $C_n = n$ die Voraussetzung „vorhersagbar“. Daher liegt kein Widerspruch vor.

■■

Aufgabe 6.2. Lösung: $\boxed{\text{Fehler in der Angabe: } \lim_{n\to\infty} \mathbb{V}(X_n/\mu^n) \text{ statt } \lim_{n\to\infty} X_n/\mu^n}$

(a) Das wurde bereits in Beispiel 3.4.h gezeigt.

(b) Die Rechnung aus Beispiel 3.4.h zeigt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) &= \sum_{k=1}^\infty \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=k\}}\mathbb{E}\left(N_{n,1} + \cdots + N_{n,k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^\infty \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=k\}} k\mu = \mu X_{n-1}.\end{aligned}$$

Wenn wir also $\mathbb{E}(X_n^2 \mid \mathscr{F}_{n-1})$ berechnen wollen, ist die folgende Größe wesentlich:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((N_{n,1} + \cdots + N_{n,k})^2\right) &= \sum_{i=1}^k \mathbb{E}(N_{n,i}^2) + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}N_{n,i}N_{n,j}\\ &= k\mathbb{E}(N_{n,1}^2) + k(k-1)(\mathbb{E}N_{n,1})^2\\ &= k\left[\mathbb{E}(N_{n,1}^2) - (\mathbb{E}N_{n,1})^2\right] + k^2(\mathbb{E}N_{n,1})^2\\ &= k\mathbb{V}N_{n,1} + k^2(\mathbb{E}N_{n,1})^2\\ &= k\sigma^2 + k^2\mu^2.\end{aligned}$$

In dieser Rechnung verwenden wir (mehrfach), dass die ZV $N_{n,i}$, $i = 1, \ldots,$ iid sind.

Die Behauptung $\mathbb{E}(X_{n+1}^2 \mid \mathscr{F}_n) = \mu^2 X_n^2 + \sigma^2 X_n$ folgt nun genauso wie in der Rechnung von Beispiel 3.4.h.

(c) Wenn wir die in (b) gezeigte Gleichheit integrieren (den Erwartungswert bilden) und durch $(\mu^{n+1})^2$ dividieren, dann folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\frac{X_{n+1}}{\mu^{n+1}}\right)^2\right] &= \mu^2 \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{\mu^{n+1}}\right)^2\right] + \frac{\sigma^2}{\mu^{n+2}} \mathbb{E}\left[\frac{X_n}{\mu^n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{\mu^n}\right)^2\right] + \frac{\sigma^2}{\mu^{n+2}} \mathbb{E}\left[\frac{X_n}{\mu^n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{\mu^n}\right)^2\right] + \frac{\sigma^2}{\mu^{n+2}}.
\end{aligned}$$

Wir verwenden hier, dass X_n/μ^n ein MG ist (also konstanten Erwartungswert hat). Weil dann $(X_n/\mu^n)^2$ ein Submartingal ist und daher wachsenden Erwartungswert hat, folgt

$$0 \leqslant \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_{n+1}}{\mu^{n+1}}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{\mu^n}\right)^2\right] = \frac{\sigma^2}{\mu^{n+2}}. \tag{6.1}$$

Wenn $L = \sup_n \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{\mu^n}\right)^2\right] < \infty$ ist, dann folgt aus (6.1) aus der Monotonie der Folge $\mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{\mu^n}\right)^2\right]$, dass

$$0 = \lim_n \left\{\mathbb{E}\left[\left(\frac{X_{n+1}}{\mu^{n+1}}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{\mu^n}\right)^2\right]\right\} = \lim_n \frac{\sigma^2}{\mu^{n+2}}$$

gilt, d.h. $\mu > 1$.

Umgekehrt, wenn $\mu > 1$ ist, dann folgt aus Summation von (6.1)

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_{N+1}}{\mu^{N+1}}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_1}{\mu^1}\right)^2\right] &= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_{n+1}}{\mu^{n+1}}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{\mu^n}\right)^2\right] \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma^2}{\mu^{n+2}} = \frac{\sigma^2}{\mu^2} \frac{\mu}{\mu - 1}.
\end{aligned}$$

Das zeigt die L^2-Beschränktheit des Martingals X_n/μ^n.

(d) Der MG-Konvergenzsatz für L^2-beschränkte MG zeigt, dass

$$\frac{X_n}{\mu^n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{in } L^1,\ L^2 \text{ und f.s.}} Z \in L^2(\mathbb{P}).$$

Die Rechnung aus Teil (c) zeigt daher

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_{N+1}}{\mu^{N+1}}\right)^2\right] - \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\frac{X_1}{\mu^1}\right)^2\right]}_{=1} &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_{n+1}}{\mu^{n+1}}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{\mu^n}\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma^2}{\mu^{n+2}} = \frac{\sigma^2}{\mu^2} \frac{\mu}{\mu - 1}
\end{aligned}$$

also

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_{N+1}}{\mu^{N+1}}\right)^2\right] = \frac{\sigma^2}{\mu(\mu-1)} + 1.$$

Mithin gilt

$$\mathbb{V}\left(\frac{X_{N+1}}{\mu^{N+1}}\right) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_{N+1}}{\mu^{N+1}}\right)^2\right] - \left[\mathbb{E}\left(\frac{X_{N+1}}{\mu^{N+1}}\right)\right]^2 = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_{N+1}}{\mu^{N+1}}\right)^2\right] - 1 \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{\sigma^2}{\mu(\mu-1)}.$$

Es gilt sogar mehr: Weil $U \mapsto \mathbb{V}U$ stetig in L^2 ist, gilt auch

$$\mathbb{V}\left(\lim_N \frac{X_{N+1}}{\mu^{N+1}}\right) = \lim_N \mathbb{V}\left(\frac{X_{N+1}}{\mu^{N+1}}\right) = \frac{\sigma^2}{\mu(\mu-1)}.$$

■■

Aufgabe 6.3. Lösung: Das ist offensichtlich: wir verwenden in diesem Fall Bienaymé und erhalten $\langle X\rangle_n = \mathbb{V}X_n \to \infty$.

■■

Aufgabe 6.4. Lösung: Nach Voraussetzung gilt

$$\sum_{i=1}^\infty \mathbb{V}\left[\frac{\xi_i - \mathbb{E}\xi_i}{i}\right] = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{V}\left[\frac{\xi_i}{i}\right] = \sum_{i=1}^\infty \frac{\mathbb{V}\xi_i}{i^2} < \infty \xRightarrow{\text{Satz 6.6}} \sum_{i=1}^\infty \frac{\xi_i - \mathbb{E}\xi_i}{i} \quad \text{konv. f.s.}$$

Wenn wir nun Kroneckers Lemma (Lemma 6.8) mit $x_i = \xi_i(\omega) - \mathbb{E}\xi_i$ und $a_i = i$ anwenden, folgt sofort die Behauptung.

■■

Aufgabe 6.5. Lösung: Stets gilt, dass die Konvergenzmenge $C \subset \{\sup_n X_n < \infty\}$. Im Hinblick auf Korollar 6.3 gilt daher bereits (6.5).

Für die Umkehrung, vgl. den Beweis von Lemma 8.13: hier wird gezeigt, dass die Konvergenzmengen von X_n und $M_n := X_n^2 - \langle X\rangle_n = X_n^2 - A_n$ gleich sind. Damit muß auch $A_n^2 = \sum_{i=1}^n n\sigma_i^2$ konvergieren.

■■

Aufgabe 6.6. Lösung: Wegen der Vorhersagbarkeit von A ist $T_c := \inf\{n : A_{n+1} > c\}$, $c > 0$, eine Stoppzeit. Wenn wir die Doob-Zerlegung von Y stoppen und dann integrieren, erhalten wir

$$\mathbb{E}Y_{n\wedge T_c} = \mathbb{E}Y_0 + \mathbb{E}M_{n\wedge T_c} + \mathbb{E}A_{n\wedge T_c} \leqslant \mathbb{E}Y_0 + c \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

weil der gestoppte Prozess M^{T_c} ein Martingal ist, vgl. Satz 4.4. Der Martingalkonvergenzsatz 5.3 zeigt, dass $\lim_{n\to\infty} Y_{n\wedge T_c}$ f.s. existiert und endlich ist; mithin

$$\{A_\infty \leqslant c\} \subset \{T_c = \infty\} \subset \{\exists \lim_n Y_n \in \mathbb{R}\}$$

und wir erhalten schließlich $\{A_\infty < \infty\} = \bigcup_{c>0}\{A_\infty \leqslant c\} \subset \{\exists \lim_n Y_n \in \mathbb{R}\}$.

■■

Aufgabe 6.7. Lösung: Die ZV $\xi_n := \epsilon_n/n$ sind unabhängig mit $\mathbb{E}\xi_n = 0$ und $\mathbb{V}\xi_n = 1/n^2$. Damit folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 6.6.

Bemerkung. Die CF von ϵ_n ist $\phi_{\epsilon_n}(\xi) = \frac{e^{i\xi}-e^{-i\xi}}{2} = \sin\xi$. Sei $X := \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n/n$. Dann haben wir

$$\phi_X(\xi) = \prod_{n=1}^{\infty} \sin(\xi/n).$$

Weil $M_N := \sum_{n=1}^{N} \epsilon_n/n$ ein Martingal ist und $\mathbb{V}M_N \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \neq 0$ konvergiert, ist $X \neq const$ f.s.; insbesondere ist dann $\phi_X(\xi) \neq const$ (das ist apriori nicht so offensichtlich).

7 Gleichgradig integrierbare Martingale

Aufgabe 7.1. Lösung:

(a) Nach Definition gilt $\exists R_0 : \sup_i \int_{\{|X_i|>R_0\}} |X_i| \, d\mathbb{P} < 1$ und daher haben wir

$$\sup_i \mathbb{E}(|X_i|) \leqslant \sup_i \int_{\{|X_i|\leqslant R_0\}} |X_i| \, d\mathbb{P} + \sup_i \int_{\{|X_i|>R_0\}} |X_i| \, d\mathbb{P} \leqslant R_0 + 1 < \infty.$$

(b) Folgt unmittelbar aus

$$\sup_{i\in I\smallsetminus J} \int_{\{|X_i|>R\}} |X_i| \, d\mathbb{P} \leqslant \sup_{i\in I} \int_{\{|X_i|>R\}} |X_i| \, d\mathbb{P} \xrightarrow[R\to\infty]{\text{ggi}} 0$$

(c) Wir wissen bereits, dass jede einpunktige Familie $\{X_i\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ fest, ggi ist. Somit

$$\forall \epsilon > 0, \; i = 1, \ldots, n \quad \exists R_i \; : \; \int_{\{|X_i|>R_i\}} |X_i| \, d\mathbb{P} < \epsilon.$$

Setze nun $R = R_1 + \ldots + R_n$. Dann gilt

$$\int_{\{|X_i|>R\}} |X_i| \, d\mathbb{P} \leqslant \int_{\{|X_i|>R_i\}} |X_i| \, d\mathbb{P} < \epsilon$$

und da die Ungleichung gleichmäßig in i ist, finden wir

$$\max_{i=1,\ldots,n} \int_{\{|X_i|>R\}} |X_i| \, d\mathbb{P} < \epsilon$$

d.h. die Behauptung folgt.

(d) Nach Voraussetzung gilt $\forall \epsilon > 0$

$$\exists R_0 : \; \sup_i \int_{\{|Y_i|>R_0\}} |Y_i| \, d\mathbb{P} < \epsilon \quad \forall R \geqslant R_0$$

und

$$\exists R_1 : \; \sup_i \int_{\{|X_i|>R_1\}} |X_i| \, d\mathbb{P} < \epsilon \quad \forall R \geqslant R_1$$

und daher

$$\sup_{Z\in\{Y_i, X_i : i\in I\}} \int_{\{|Z|>R\}} |Z| \, d\mathbb{P} < \epsilon \quad \forall R \geqslant R_0 \vee R_1$$

und damit folgt ggi.

(e) $\boxed{\text{Achtung: } (Y_i)_i \text{ muss auch als ggi vorausgesetzt werden!}}$ Weil

$$\{|tX_i + (1-t)Y_i| > R\} \subset \{|X_i| > R/2\} \cup \{|Y_i| > R/2\}$$

gilt—sonst hätten wir nämlich $|tX_i+(1-t)Y_i| \leqslant t|X_i|+(1-t)|Y_i| \leqslant tr/2+(1-t)R/2 = R$—sehen wir

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|tX_i+\beta Y_i|>R\}} |tX_i + \beta Y_i| \, d\mathbb{P} \\
&\qquad \leqslant \int_{\{|X_i|>R/2\}\cup\{|Y_i|>R/2\}} t|X_i| \, d\mathbb{P} + \int_{\{|X_i|>R/2\}\cup\{|Y_i|>R/2\}} \beta|Y_i| \, d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

OE können wir den ersten Summanden betrachten.

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|X_i|>R/2\}\cup\{|Y_i|>R/2\}} t|X_i| \, d\mathbb{P} \\
&\leqslant \int_{\{|X_i|>R/2\}\}} |X_i| \, d\mathbb{P} + \int_{\{|Y_i|>R/2\}} |X_i| \, d\mathbb{P} \\
&= \int_{\{|X_i|>R/2\}\}} |X_i| \, d\mathbb{P} + \int_{\{|Y_i|>R/2\}\cup\{|X_i|>N\}} |X_i| \, d\mathbb{P} + \int_{\{|Y_i|>R/2\}\cup\{|X_i|\leqslant N\}} |X_i| \, d\mathbb{P} \\
&= \int_{\{|X_i|>R/2\}\}} |X_i| \, d\mathbb{P} + \int_{\{|X_i|>N\}} |X_i| \, d\mathbb{P} + N \int_{\{|Y_i|>R/2\}} d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

und mit der Chebyshev-Markov Ungleichung $\mathbb{P}(|Y_i| > R/2) \leqslant \frac{2}{R}\mathbb{E}(|Y_i|)$ erhalten wir

$$\leqslant \int_{\{|X_i|>R/2\}\}} |X_i| \, d\mathbb{P} + \int_{\{|X_i|>N\}} |X_i| \, d\mathbb{P} + N\frac{2}{R}\mathbb{E}|Y_i|.$$

Diese Abschätzung gilt auch für $\sup_i$—beachte dass die Familie $(Y_i)_i$ L^1-beschränkt ist—und die Behauptung folgt, indem wir erst den Grenzwert $R \to \infty$ und dann $N \to \infty$ bilden.

(f) Wir zeigen eine etwas allgemeinere Aussage: $(X_i)_i$ sei ggi und X sein ein Element des L^1-Abschlusses dieser Menge, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists i_\epsilon \in I \,:\, \mathbb{E}|X - X_{i_\epsilon}| \leqslant \epsilon.$$

Weiter gibt eine Folge i_n mit $X_{i_n} \to X$ in L^1 und f.s., also

$$\mathbb{E}|X| = \mathbb{E}|\liminf_n X_{i_n}| \overset{\text{Fatou}}{\leqslant} \liminf_n \mathbb{E}|X_{i_n}| \leqslant \sup_i \mathbb{E}|X_i|.$$

Nunmehr haben wir für alle $R > 0$

$$\begin{aligned}
\int_{\{|X|>R\}} |X| \, d\mathbb{P} &\leqslant \int_{\{|X|>R\}} |X - X_{i_\epsilon}| \, d\mathbb{P} + \int_{\{|X|>R\}} |X_{i_\epsilon}| \, d\mathbb{P} \\
&\leqslant \epsilon + \int_{\{|X|>R\}\cap\{|X_{i_\epsilon}|>N\}} |X_{i_\epsilon}| \, d\mathbb{P} + \int_{\{|X|>R\}\cap\{|X_{i_\epsilon}|\leqslant N\}} |X_{i_\epsilon}| \, d\mathbb{P} \\
&\leqslant \epsilon + \sup_i \int_{\{|X_i|>N\}} |X_i| \, d + N \int_{\{|X|>R\}} d\mathbb{P} \\
&\leqslant \epsilon + \sup_i \int_{\{|X_i|>N\}} |X_i| \, d + N\mathbb{P}\{|X| > R\} \\
&\leqslant \epsilon + \sup_i \int_{\{|X_i|>N\}} |X_i| \, d + \frac{N}{R}\mathbb{E}|X| \\
&\leqslant \epsilon + \sup_i \int_{\{|X_i|>N\}} |X_i| \, d + \frac{N}{R} \sup_i \mathbb{E}|X_i|.
\end{aligned}$$

Wenn wir erst $R \to \infty$, dann $N \to \infty$ und schließlich $\epsilon \to 0$ schicken, dann folgt die Behauptung, da alle Abschätzungen gleichmäßig für X gelten.

(g) Offensichtlich ist $Y_i \geqslant 0$. Weil $|X_i| \leqslant Y_i$ gilt, folgt $\{|X_i| > R\} \subset \{Y_i > R\}$ und wegen der Monotonie des Integrals folgt

$$\int_{|X_i|>R} |X_i| \, d\mathbb{P} \leqslant \int_{Y_i>R} Y_i \, d\mathbb{P} \overset{Y_i \geqslant 0}{=} \int_{|Y_i|>R} |Y_i| \, d\mathbb{P} \leqslant \sup_{i\in I} \int_{|Y_i|>R} |Y_i| \, d\mathbb{P},$$

woraus die ggi-Eigenschaft für $(X_i)_{i\in I}$ folgt.

Aufgabe 7.2. Lösung: Es sei $R > 0$ fest. Dann ist

$$n\mathbb{1}_{(0,1/n]}(t) > R \iff n > R \quad \text{und} \quad t \leqslant 1/n\big[< 1/R\big]$$

also $\{t : n\mathbb{1}_{(0,1/n]}(t) > R\} = (0, 1/n]$ wenn $n > R$, und $= \emptyset$, wenn $n < R$.

$$\begin{aligned}
\sup_n \int_{\{n\mathbb{1}_{(0,1/n]}>R\}} n\mathbb{1}_{(0,1/n]}(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) &= \sup_n \int_{\{n\mathbb{1}_{(0,1/n]}>R\}} n\mathbb{1}_{(0,1/n]}(\omega)\,d\omega \\
&= \sup_n \int_{(0,1/n]} n\mathbb{1}_{(0,1/n]}(\omega)\,d\omega \\
&= \sup_n 1 = 1
\end{aligned}$$

(da wir das $\sup_n$ betrachten, spielt der Wert $\int_\emptyset \ldots = 0$ keine Rolle!). Damit kann die Folge nicht ggi sein.

Aufgabe 7.3. Lösung: Wenn $\phi(0) \neq 0$, dann betrachten wir $\psi(x) = \phi(x) - \phi(0)$, die angegebene Integrierbarkeitsbedingung bleibt offenbar für ψ erhalten.

O.B.d.A. sei daher $\phi(0) = 0$. Für $a \leqslant b$ gilt auf Grund der Konvexität $b \leqslant \frac{\phi(b)}{\phi(a)}\, a$. Somit

$$\int_{\{|X_i|>R\}} |X_i| \, d\mathbb{P} \leqslant \int_{\{|X_i|>R\}} R \frac{\phi(|X_i|)}{\phi(R)} \, d\mathbb{P} \leqslant \frac{R}{\phi(R)} \sup \mathbb{E}(\phi(|X_i|))$$

und dieser Ausdruck strebt nach Voraussetzung gegen 0.

Aufgabe 7.4. Lösung:

(a) Es sei $k < n$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_n|\mathscr{F}_k) &\overset{\xi_j \text{ ist } \mathscr{F}_k \text{ mb. für } j \leqslant k}{=} M_k \mathbb{E}(\xi_{k+1} \cdot \ldots \cdot \xi_n | \mathscr{F}_k) \\
&\overset{\text{unabhängig}}{=} M_k \mathbb{E}(\xi_{k+1}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}(\xi_n) \\
&= M_k
\end{aligned}$$

Die f.s. Konvergenz folgt unmittelbar aus (a), $\mathbb{E}|M_n| = \mathbb{E}(M_n) = 1$ mit dem MG-Konvergenzsatz.

(b) $M_n \xrightarrow{f.s.} M_\infty \implies M_n \xrightarrow{\mathbb{P}} M_\infty$ und nach dem Satz von Vitali sind dann folgende Aussagen äquivalent.

a) $(M_n)_n$ ist ggi

b) $M_n \xrightarrow{L^1} M_\infty$

c) $1 = \mathbb{E}(M_n) \to \mathbb{E}(M_\infty)$

(c) Im Hinblick auf Satz 7.9 genügt es zu zeigen, dass das Martingal $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichgradig integrierbar ist (also nicht abschließbar ist). Das folgt aber sogleich aus der Bemerkung, dass gilt

$$M_n = \begin{cases} 2^n & \text{auf } F_n := \bigcap_{i=1}^n \{\xi_i = 2\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

daher gilt für alle $0 < R \leqslant 2^n$

$$\int_{|M_n|>R} |M_n| \, d\mathbb{P} = \int |M_n| \, d\mathbb{P} = 1.$$

Das widerspricht aber der ggi-Bedingung, wonach

$$\lim_{R\to\infty} \sup_n \int_{|M_n|>R} |M_n| \, d\mathbb{P} \overset{!!}{=} 0$$

gelten muß.

Aufgabe 7.5. Lösung: Angenommen, X wäre ggi. Dann gäbe es eine ZV $Y \in L^1$ mit $\lim_n \mathbb{E}|X_n - Y| = 0$. Insbesondere folgt dann

$$\mathbb{E}\left|n^{-1/2} X_n\right| = n^{-1/2} \mathbb{E}|X_n| \leqslant n^{-1/2} \mathbb{E}|X_n - Y| + n^{-1/2} \mathbb{E}|Y| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Insbesondere also $n^{-1/2} X_n \to 0$ in Verteilung (d-Limes). Das widerspricht aber dem CLT, der für die Folge $(\xi_n)_n$ gilt: $X_n/\sqrt{n} \to G \sim \mathsf{N}(0,1)$.

Also kann X nicht ggi sein.

Aufgabe 7.6. Lösung: Dominierte Konvergenz: vgl. MI Satz 11.3. Es gilt

$$X_i \xrightarrow[i\to\infty]{f.s.} X \implies X_i \xrightarrow[i\to\infty]{\mathbb{P}} X$$
$$|X_i| \leqslant Y \in L^1 \overset{7.4.b}{\implies} (X_i)_i \text{ ist ggi}$$

und damit zeigt Vitali 7.9, Beweisschritt a $\implies$ b die Aussage des Satzes von der dominierten Konvergenz.

Aufgabe 7.7. Lösung: Für $F \in \mathscr{F}_m$ und $m < n$ gilt

$$\mathbb{E}|\mathbb{1}_F X_n - \mathbb{1}_F Z| = \mathbb{E}(|X_n - Z|\mathbb{1}_F) \leqslant \mathbb{E}(|X_n - Z|) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

also $\int_F X_n \, d\mathbb{P} \xrightarrow{n\to\infty} \int_F Z \, d\mathbb{P}$. Wegen der super-MG Eigenschaft gilt nun aber

$$\int_F X_m \, d\mathbb{P} \geqslant \int_F X_n \, d\mathbb{P} \xrightarrow{n\to\infty} \int_F Z \, d\mathbb{P}$$

und die Behauptung folgt.

Aufgabe 7.8. Lösung: Wir haben für $R > 0$

$$\begin{aligned}
\int_{|X_{T\wedge n}|>R} |X_{T\wedge n}| \, d\mathbb{P} &= \int_{\{|X_{T\wedge n}|>R\}\cap\{T\leqslant n\}} |X_{T\wedge n}| \, d\mathbb{P} + \int_{\{|X_{T\wedge n}|>R\}\cap\{T>n\}} |X_{T\wedge n}| \, d\mathbb{P} \\
&= \int_{\{|X_T|>R\}\cap\{T\leqslant n\}} |X_T| \, d\mathbb{P} + \int_{\{|X_n|>R\}\cap\{T>n\}} |X_n| \, d\mathbb{P} \\
&\leqslant \int_{\{|X_T|>R\}} |X_T| \, d\mathbb{P} + \sup_n \int_{\{|X_n|>R\}} |X_n| \, d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Der erste Term konvergiert für $R \to \infty$ gegen Null (dominierte Konvergenz, $X_T \in L^1$ ist integrierbare Majorante), der zweite Term konvergiert gegen Null, weil $(X_n)_n$ ggi ist.

Aufgabe 7.9. Lösung: Die Integrierbarkeit von X_S, X_T folgt so wie im Beweis von Satz 7.11. Weil $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, folgt $\mathbb{P}(T > n) \to 0$ für $n \to \infty$. Wir zeigen nun allgemein, dass für eine ggi-Familie $(X_n)_n$ und eine beliebige Folge von Mengen $(F_n)_n \subset \mathscr{A}$ mit $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(F_n) = 0$ gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{F_n} |X_n| \, d\mathbb{P} = 0.$$

Das folgt so:

$$\begin{aligned}
\int_{F_n} |X_n| \, d\mathbb{P} &= \int_{F_n\cap\{|X_n|\leqslant R\}} |X_n| \, d\mathbb{P} + \int_{F_n\cap\{|X_n|>R\}} |X_n| \, d\mathbb{P} \\
&\leqslant \int_{F_n\cap\{|X_n|\leqslant R\}} R \, d\mathbb{P} + \int_{F_n\cap\{|X_n|>R\}} |X_n| \, d\mathbb{P} \\
&\leqslant \int_{F_n} R \, d\mathbb{P} + \int_{\{|X_n|>R\}} |X_n| \, d\mathbb{P} \\
&\leqslant R\mathbb{P}(F_n) + \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|X_n|>R\}} |X_n| \, d\mathbb{P} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 + \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|X_n|>R\}} |X_n| \, d\mathbb{P} \xrightarrow[R\to\infty]{\text{ggi}} 0 + 0.
\end{aligned}$$

Also gilt in diesem Fall sogar $\limsup_{n\to\infty} \int_{\{T>n\}} |X_n| \, d\mathbb{P} = 0$, und weil die Folge positiv ist, $\lim_{n\to\infty} \int_{\{T>n\}} |X_n| \, d\mathbb{P} = 0$.

Aufgabe 7.10. Lösung: Wenn $(X_n)_n$ ein Martingal ist, dann ist $(X_{T\wedge n})_n$ ein MG und $(|X_{T\wedge n}|)_n$ ein sub-Martingal (da wir im MG-Fall die Monotonie der konvexen Funktion nicht benötigen!). Daher gilt

$$\mathbb{E}|X_{T\wedge n}| \underset{\text{-MG}}{\overset{\text{sub}}{\leqslant}} \mathbb{E}|X_n| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty,$$

d.h. der Beginn des Beweises läßt sich deutlich einfacher gestalten.

■■

Aufgabe 7.11. Lösung: Für jedes MG X_n ist $|X_n|$ ein positives Sub-MG. Daher genügt es, diesen Fall zu untersuchen. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\{X_{n\wedge S}>R\}} X_{n\wedge S}\,d\mathbb{P} &\leqslant \int_{\{X_{n\wedge S}>R\}} X_n\,d\mathbb{P}\\ &= \int_{\{X_{n\wedge S}>R\}\cap\{X_n<\frac{1}{2}X_{n\wedge S}\}} X_n\,d\mathbb{P} + \int_{\{X_{n\wedge S}>R\}\cap\{X_n\geqslant\frac{1}{2}X_{n\wedge S}\}} X_n\,d\mathbb{P}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_{\{X_{n\wedge S}>R\}} X_{n\wedge S}\,d\mathbb{P} + \int_{\{X_n>\frac{1}{2}R\}} X_n\,d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Indem wir diese Ungleichung umstellen, folgt

$$\int_{\{X_{n\wedge S}>R\}} X_{n\wedge S}\,d\mathbb{P} \leqslant 2\int_{\{X_n>\frac{1}{2}R\}} X_n\,d\mathbb{P}$$

und die rechte Seite konvergiert (dom. Konvergenz) gegen 0.

■■

8 Einige klassische Resultate der W-Theorie

Aufgabe 8.1. Lösung: Die Menge $\{X = c\}$ ist in $\mathscr{T}$, d.h. $\mathbb{P}(X = c)$ ist Null oder Eins, d.h. es gibt ein c_0 mit $X = c_0$ f.s.

Aufgabe 8.2. Lösung:

(a) Das ist gerade Lévy's upward theorem, Satz 8.1. Beachte dass wegen $|X| \leqslant \sup_n |X_n| \leqslant Z$ die ZV X integrierbar ist.

(b) $|X| \leqslant \sup_n |X_n| \leqslant Z$ und daher $\Delta_n \leqslant \sup_i |X_i| + |X| = 2|X| \leqslant 2Z$.

(c) Offensichtlich gilt $\Delta_n \to 0$ punktweise. Weil aber Δ_n integrierbar beschränkt ist, folgt L^1-Konvergenz mit Hilfe des Satzes von der dominierten Konvergenz. Somit

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_n) - \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_\infty)| &\leqslant |\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_n) - \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_n)| + |\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_n) - \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_\infty)| \\ &\leqslant \mathbb{E}(|X_n - X| \mid \mathscr{F}_n) + |\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_n) - \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_\infty)|\end{aligned}$$

Der erste Term konvergiert in L^1 gegen Null, weil

$$\mathbb{E}\,|\mathbb{E}(|X_n - X| \mid \mathscr{F}_n)| = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(|X_n - X| \mid \mathscr{F}_n)\right) = \mathbb{E}|X_n - X| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Die punktweise Konvergenz sieht man so:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_n - X| \mid \mathscr{F}_n) &\leqslant \mathbb{E}(\Delta_m \mid \mathscr{F}_n) \qquad \forall m \leqslant n \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{\text{Satz 8.1}} \mathbb{E}(\Delta_m \mid \mathscr{F}_\infty) \qquad \forall m \\ &\xrightarrow[m\to\infty]{\text{Satz 2.7}} \mathbb{E}(0 \mid \mathscr{F}_\infty) = 0.\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt verwenden wir Lévys Vorwärtskonvergenztheorem (Satz 8.1) und anschließend die bed. dom. Konvergenz – aka: bLebesgue, Satz 2.7; die Majorante ist $\Delta_n \leqslant 2Z$.

Der zweite Term konvergiert wegen Teil a) f.s. (und auch in L^1, vgl. die Aussage von Satz 8.1).

Aufgabe 8.3. Lösung: *Es sei $(\mathscr{G}_\nu)_{\nu\in-\mathbb{N}}$ eine Filtration und $(Y_\nu)_{\nu\in-\mathbb{N}}$ ZV, die gleichmäßig durch eine integrierbare ZV Z beschränkt sind:* $\sup_{\nu\in-\mathbb{N}} |Y_\nu| \leqslant Z$. *Wenn* $\lim_{\nu\to-\infty} Y_\nu = Y_{-\infty}$ *f.s., dann gilt* $\lim_{\nu\to-\infty} \mathbb{E}(Y_\nu \mid \mathscr{G}_\nu) = \mathbb{E}(Y_{-\infty} \mid \mathscr{G}_{-\infty})$ *f.s. und in L^1.*

Beweis: Wir verwenden Lévys Rückwärtstheorem (Satz 8.5) und $\Delta_\mu := \sup_{\nu\leqslant\mu}|Y_\nu - Y_{-\infty}|$. Dann verläuft der Beweis wie in der vorherigen Aufgabe.

Aufgabe 8.4. Lösung:

(a) Weil die Schritte zentriert und integrierbar sind, ist X_n ein MG. Weil die Schritte f.s. beschränkt sind, ist die Bedingung (5.4) erfüllt, d.h. wir können Korollar 5.10 anwenden.

(b) Wenn $\sum_{n=1}^\infty \xi_n$ f.s. konvergiert, dann gilt auch $\mathbb{P}(\lim_n \xi_n = 0) = 1$, also auch $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$. Weil die ξ_i iid und nichttrivial ($\not\equiv 0$) sind, ist das allerdings unmöglich, d.h. $\sum_{n=1}^\infty \xi_n$ divergiert f.s.

(c) Wir wissen bereits, dass die Folge X_n oszillierend divergiert. Weil X_n sich immer nur um ± 1 verändert, muß es alle Zahlen $\mathbb{Z}$ unendlich oft besuchen.

(d) Offensichtlich ist $T = \inf\{n : S_n = 1\}$, und das ist eine Stoppzeit. Es gilt

$$\begin{aligned}\{T<\infty\} &= \{\omega : \exists n\in\mathbb{N}, S_n(\omega)=1\}\\ &\supset \{\omega : \text{für unendlich viele } n\in\mathbb{N} \text{ gilt } S_n(\omega)=1\}.\end{aligned}$$

Wir wissen bereits, dass $\mathbb{P}(S_n = 1 \text{ unendlich oft}) = 1 \implies \mathbb{P}(T<\infty) = 1$ wegen der eben gezeigten Inklusion.

Aufgabe 8.5. Lösung:

(a) Weil S_n ein MG ist, ist S_n^2 ein Sub-MG (konvexe Funktion eines MG). Es sei $V_n = \langle S\rangle_n$. Da Y_{n+1} unabhängig von $\mathscr{F}_n$ ist, folgt

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}\mid\mathscr{F}_n) = \mathbb{E}Y_{n+1} = 0$$

und daher, vgl. (3.12),

$$\begin{aligned}V_{n+1}-V_n &= \mathbb{E}(S_{n+1}^2 - S_n^2\mid\mathscr{F}_n)\\ &= \mathbb{E}(Y_{n+1}^2 + 2Y_{n+1}S_n\mid\mathscr{F}_n)\\ &= \mathbb{E}(Y_{n+1}^2) + 2S_n\mathbb{E}(Y_{n+1}\mid\mathscr{F}_n) = 1.\end{aligned}$$

Mithin: $V_n = n$.

(b) Offensichtlich gilt mit pull-out und u.a.:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1}-M_n\mid\mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}(\operatorname{sgn}(S_n)Y_{n+1}\mid\mathscr{F}_n)\\ &= \operatorname{sgn}(S_n)\mathbb{E}(Y_{n+1}\mid\mathscr{F}_n)\\ &= \operatorname{sgn}(S_n)\mathbb{E}(Y_{n+1}) = 0.\end{aligned}$$

Damit ist $(M_n)_n$ ein MG und $(M_n^2)_n$ ein sub-MG. Der Kompensator $A_n = \langle M\rangle_n$ ist dann

$$\begin{aligned}A_{n+1} - A_n &= \mathbb{E}(M_{n+1}^2 - M_n^2 \mid \mathscr{F}_n)\\ &= \mathbb{E}(\operatorname{sgn}(S_n)^2 Y_{n+1}^2 + 2M_n \operatorname{sgn}(S_n) Y_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)\\ &= \operatorname{sgn}(S_n)^2 \mathbb{E}(Y_{n+1}^2 \mid \mathscr{F}_n) + 2M_n \operatorname{sgn}(S_n)\mathbb{E}(Y_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)\\ &= \operatorname{sgn}(S_n)^2 \cdot 1 + 0 = \mathbb{1}_{\{S_n \neq 0\}}.\end{aligned}$$

Somit: $A_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{S_i \neq 0\}}$.

(c) Es ist $(|S_n|)_n$ ein sub-MG, da $(S_n)_n$ ein MG ist. Wir schreiben $|S_n| = N_n + B_n$ für seine Doob-Zerlegung, wobei N das Martingal und B den vorhersagbaren Prozeß bezeichnen. Nun gilt auf $\{S_n > 0\}$, dass $S_{n+1} \geqslant 0$ und $|S_{n+1}| - |S_n| = S_{n+1} - S_n = Y_{n+1}$. Somit

$$\mathbb{E}\left((|S_{n+1}| - |S_n|)\mathbb{1}_{\{S_n>0\}} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) = \mathbb{1}_{\{S_n>0\}}\mathbb{E}\left(Y_{n+1} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) = 0.$$

Analog gilt auf $\{S_n < 0\}$, dass $|S_{n+1}| - |S_n| = S_n - S_{n+1} = -Y_{n+1}$. Somit

$$\mathbb{E}\left((|S_{n+1}| - |S_n|)\mathbb{1}_{\{S_n<0\}} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) = 0.$$

Mithin gilt

$$B_{n+1} - B_n = \mathbb{E}\left(|Y_{n+1}|\mathbb{1}_{\{S_n=0\}} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) = \mathbb{1}_{\{S_n=0\}}.$$

Damit

$$B_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{S_i=0\}}$$

sowie

$$\begin{aligned}|S_{n+1}| - |S_n| &= Y_{n+1}\mathbb{1}_{\{S_n>0\}} + |Y_{n+1}|\mathbb{1}_{\{S_n=0\}} - Y_{n+1}\mathbb{1}_{\{S_n<0\}}\\ &= Y_{n+1}\mathbb{1}_{\{S_n>0\}} + \mathbb{1}_{\{S_n=0\}} - Y_{n+1}\mathbb{1}_{\{S_n<0\}}\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}N_{n+1} - N_n &= |S_{n+1}| - |S_n| - \mathbb{1}_{\{S_n=0\}}\\ &= Y_{n+1}\mathbb{1}_{\{S_n>0\}} - Y_{n+1}\mathbb{1}_{\{S_n<0\}} = \operatorname{sgn}(S_n)Y_{n+1}.\end{aligned}$$

Das zeigt $N_n = M_n$. Insbesondere $M_n = |S_n| - \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{|S_i|=0\}}$, d.h. M_n ist messbar bezüglich $\sigma(|S_1|, \dots, |S_n|)$.

■■

Aufgabe 8.6. Lösung:

(a) Offenbar impliziert $\nu|\mathscr{F}_n \leqslant \mathbb{P}|\mathscr{F}_n$ auch $\nu|\mathscr{F}_n \ll \mathbb{P}|\mathscr{F}_n$ und damit gilt nach dem Satz von Radon-Nikodým, dass $\nu|\mathscr{F}_n = M_n \cdot \mathbb{P}|\mathscr{F}_n$ für eine geeignete, $\mathscr{F}_n$-messbare ZV.

(b) Da $\Omega \in \mathscr{F}_n$ und da $M_n \geqslant 0$, finden wir

$$\infty > \nu(\Omega) = \int_\Omega M_n \, d\mathbb{P} = \mathbb{E} M_n$$

d.h. $M_n \in L^1(\mathscr{F}_n, \mathbb{P})$. Weiter gilt für $F \in \mathscr{F}_n$ weil ja $F \in \mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}$, d.h. $F \in \mathscr{F}_{n+1}$:

$$\nu(F) = \mathbb{E}(M_n \mathbb{1}_F) \quad \text{und} \quad \nu(F) = \mathbb{E}(M_{n+1} \mathbb{1}_F)$$

also $\mathbb{E}(M_n \mathbb{1}_F) = \mathbb{E}(M_{n+1} \mathbb{1}_F)$ für alle $F \in \mathscr{F}_n$, d.h. $(M_n)_n$ ist ein Martingal.

(c) Nach dem MG-Konvergenzsatz konvergieren *positive (!)* Martingale fast sicher gegen eine ZV $M_\infty \in L^1(\mathscr{F}_\infty)$. Die Integrierbarkeit sehen wir mit dem Lemma von Fatou:

$$\mathbb{E} M_\infty = \mathbb{E}(\lim_n M_n) = \mathbb{E}(\liminf_n M_n) \leqslant \liminf_n \mathbb{E} M_n = \liminf_n \nu(\Omega)$$

(d) Angenommen, $\nu|\mathscr{F}_\infty \ll \mathbb{P}|\mathscr{F}_\infty$. Dann gibt es nach dem Satz von Radon-Nikodým eine $\mathscr{F}_\infty$-mb. ZV mit

$$\nu(F) = \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_F) \quad \forall F \in \mathscr{F}_\infty.$$

Insbesondere ist für $F \in \mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_\infty$

$$\mathbb{E}(M_n \mathbb{1}_F) = \nu(F) = \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_F)$$

m.a.W. $M_n = \mathbb{E}(Y \mid \mathscr{F}_n)$ und Y schließt $(M_n)_n$ ab. Nach dem Satz von Vitali gilt dann aber auch

$$M_n \xrightarrow{n\to\infty} Y$$

und somit $Y = M_\infty$ f.s.

Umgekehrt sei nun $(M_n)_n$ abschließbar und $Y \in L^1(\mathscr{F}_\infty)$ sei der rechte Endpunkt: $M_n = \mathbb{E}(Y \mid \mathscr{F}_n)$. Dann gilt

$$\nu(F) = \mathbb{E}(M_n \mathbb{1}_F) = \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_F) \quad \forall F \in \mathscr{F}_n.$$

Damit stimmen die Maße $F \mapsto \nu(F)$ und $F \mapsto \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_F)$ für $F \in \bigcup_n \mathscr{F}_n$ überein, das ist aber ein schnitt-stabiler Erzeuger von $\mathscr{F}_\infty$, der zudem Ω enthält. Damit greift der Eindeutigkeitssatz für Maße: $\nu(A) = \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_A)$ für alle $A \in \mathscr{F}_\infty$.

(e) Für $F \in \mathscr{F}_n$ und $k \geqslant n$ gilt $\mathbb{E}(M_k \mathbb{1}_F) = \mathbb{E}(M_n \mathbb{1}_F)$. Mit Fatous Lemma gilt dann

$$\mathbb{E}(M_\infty \mathbb{1}_F) \leqslant \liminf_k \mathbb{E}(M_k \mathbb{1}_F) = \mathbb{E}(M_n \mathbb{1}_F) = \nu(F).$$

Diese Ungleichung gilt also für alle $F \in \bigcup_n \mathscr{F}_n$. Da aber $\rho(A) := \nu(A) - \mathbb{E}(M_\infty \mathbb{1}_A)$ offensichtlich ein positives Prä-Maß auf dem Halbring (!) $\bigcup_n \mathscr{F}_n$ ist, hat es eine Erweiterung zu einem positives Maß auf $\mathscr{F}_\infty$, d.h. die obige Ungleichung gilt bereits für alle F.

Wir finden nun für $F = S$:

$$\mathbb{E} M_\infty \overset{\mathbb{1} = \mathbb{1}_S \ \mathbb{P}\text{-f.s.}}{=} \mathbb{E}(M_\infty \mathbb{1}_S) \leqslant \nu(S) = 0$$

und da $M_\infty \geqslant 0$, folgt $M_\infty = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher.

(f) i. Das ist qua Konstruktion so! Beachte, dass die Verteilung von X_n unter μ ist das Bildmaß $X_n(\mu) = \mu \circ X_n^{-1}$. Da X_n die Projektion auf die Koordinate n ist, "pflückt" sich $\circ X_n^{-1}$ eben das an $n$ter Stelle stehende Maß im jeweiligen unendlichen Produkt heraus. Und das ist bei $\mathbb{P}$ das Maß $\nu_{0,1}$ und bei ν das Maß $\nu_{m_n,1}$. Die Unabhängigkeit ergibt sich in beiden Fällen aus der Produktstruktur.

ii. Es sei $g_{m_n,1}(x)\,dx = \nu_{m_n,1}(dx)$. Wir schreiben $f_n(x) = g_{m_n,1}(x)/g_{0,1}(x)$ und damit

$$f_n(x) = e^{-\frac{1}{2}m_n^2 + xm_n}.$$

Da sowohl unter $\mathbb{P}$ als auch unter ν die X_n, $n = 1, 2, \dots, k$ unabhängig sind, finden wir

$$M_n = \prod_{k=1}^n f_k(X_k)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $\nu|\mathscr{F}_n = M_n \cdot \mathbb{P}|\mathscr{F}_n$. Da $M_n > 0$ gilt mit demselben Argument $\mathbb{P}|\mathscr{F}_n = \frac{1}{M_n}\nu|\mathscr{F}_n$. Das zeigt sofort die Absolutstetigkeit in beiden Richtungen.

Beachte dabei, dass $\nu|\mathscr{F}_n \simeq \bigotimes_{k=1}^n \nu_{m_n,1}$ und $\mathbb{P}|\mathscr{F}_n \simeq \bigotimes_1^n \nu_{0,1}$.

■■

Aufgabe 8.7. Lösung: Weil die ZV unabhängig sind, gilt

$$\frac{d\mathbb{P}_{(Y_1,\dots,Y_n)}(x_1,\dots,x_n)}{d\mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)}} = p_1(x_1)\cdot\ldots\cdot p_n(x_n) \quad \text{mit} \quad p_i(x_i) = \frac{d\mathbb{P}_{Y_i}(x_i)}{d\mathbb{P}_{X_i}}.$$

Es sei $z_n = \prod_{i=1}^n p_i(x_i)$. Der Beweis des Satzes von Radon-Nikodým (Satz 8.22) zeigt, dass

$$\mathbb{P}_Y(A) = \int_{A\cap\{z_\infty<\infty\}} z_\infty\,d\mathbb{P}_X + \mathbb{P}_Y(A \cap \{z_\infty = \infty\}).$$

Wenn wir $A = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ wählen, folgt aus dieser Gleichheit

$$\int z_\infty\,d\mathbb{P}_X = 1 \iff \mathbb{P}_Y(z_\infty < \infty) = 1 \quad \text{und} \quad \int z_\infty\,d\mathbb{P}_X = 0 \iff \mathbb{P}_Y(z_\infty = \infty) = 1.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_Y \ll \mathbb{P}_X &\iff \int z_\infty\,d\mathbb{P}_X = 1 \iff \mathbb{P}_Y(z_\infty = \infty) = 0,\\ \mathbb{P}_Y \perp \mathbb{P}_X &\iff \int z_\infty\,d\mathbb{P}_X = 0 \iff \mathbb{P}_Y(z_\infty = \infty) = 1. \end{aligned}$$

Weil die ZV X_i unabhängig sind, ist die Menge

$$\{z_\infty < \infty\} = \{\log z_\infty < \infty\} = \left\{\sum_{i=1}^\infty \log p_i(X_i) < \infty\right\}.$$

terminal im Sinne von Kolmogorov (Satz 8.4), d.h. wir haben die behauptete Alternative.

■■

Aufgabe 8.8. Lösung:

(a) Weil

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i \mid \mathscr{F}_n)$$

gilt, folgt die Behauptung, wenn wir $\mathbb{E}(X_i \mid \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_n)$, $i \neq k$ zeigen. Wir wählen dazu eine typische Erzeugermenge $F \in \mathscr{F}_n$, etwa $F = \{X_1 \in B_1\} \cap \cdots \cap \{X_n \in B_n\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_F X_i \, d\mathbb{P} &= \int \mathbb{1}_{B_1}(X_1)\cdots\mathbb{1}_{B_{i-1}}(X_{i-1})X_i\mathbb{1}_{B_i}(X_i)\mathbb{1}_{B_{i+1}}(X_{i+1})\cdots\mathbb{1}_{B_n}(X_n)\, d\mathbb{P}\\
&= \int \mathbb{1}_{B_1}(X_1)\cdots\mathbb{1}_{B_{k-1}}(X_{k-1})X_k\mathbb{1}_{B_k}(X_k)\mathbb{1}_{B_{k+1}}(X_{k+1})\cdots\mathbb{1}_{B_n}(X_n)\, d\mathbb{P}\\
&= \int_F X_k \, d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

In der zweiten Gleichheit haben wir die Permutierbarkeit der Folge verwendet (indem wir X_i und X_k vertauscht haben). Das zeigt $\mathbb{E}(X_i \mid \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_n)$.

Bemerkung. Die Aussage der Aufgabe gilt auch dann noch, wenn wir $\mathscr{F}_n := \sigma\left(\sum_{i=1}^k X_i, k \geqslant n\right)$ an Stelle von $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ verwenden. Wir haben dann nämlich nach wie vor

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i \mid \mathscr{F}_n)$$

und für eine typische Erzeugermenge $F \in \mathscr{F}_n$, etwa $F = \{S_{i_1} \in B_{i_1}\} \cap \cdots \cap \{X_{i_N} \in B_{i_N}\}$, $i_1, \dots, i_N \geqslant n$ und $N \in \mathbb{N}$ gilt wegen Permutierbarkeit (beachte, dass die S Funktionen von endlich vielen der X sind)

$$\begin{aligned}
\int_F X_i \, d\mathbb{P} &= \int X_i \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(X_k)\mathbb{1}_{B_{i_1}}(S_{i_1})\cdots\mathbb{1}_{B_{i_n}}(S_{i_n})\, d\mathbb{P}\\
&= \int X_k \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(X_i)\mathbb{1}_{B_{i_1}}(S_{i_1})\cdots\mathbb{1}_{B_{i_n}}(S_{i_n})\, d\mathbb{P}\\
&= \int_F X_k \, d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

(b) Geht genauso wie die „**Bemerkung**“ in der vorherigen Teilaufgabe. Wir betrachten im Integral, in dem wir die Permutationseigenschaft verwenden, die Funktionen

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_m)\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x_{m+1})\cdots\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x_n)$$

und die Erzeugermengen der Bauart $\bigcap_{\text{endlich}, i \geqslant n+1 \geqslant m}\{U_{m,i} \in B_{m,i}\}$. Wir beachten wieder, dass die $U_{m,i}$ nur von endlich vielen der X_i abhängen, d.h. wir können wirklich ein endliches Permutationsargument heranziehen.

(c) Aus Teilaufgabe (b) wissen wir, dass

$$\begin{gathered}
\mathbb{E}\left(\phi(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}) \mid \mathscr{G}_{n+1}\right) = \mathbb{E}\left(\phi(X_1, \dots, X_m) \mid \mathscr{G}_{n+1}\right)\\
\forall 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant n+1, \quad m \leqslant n+1.
\end{gathered}$$

Indem wir über $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant n+1$ und $1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_m \leqslant n$ summieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}
U_{m,n+1} &= \mathbb{E}(U_{m,n+1} \mid \mathscr{G}_{n+1}) \\
&= \frac{1}{\binom{n+1}{m}} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant n+1} \mathbb{E}\left(\phi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}) \mid \mathscr{G}_{n+1}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\phi(X_1, \ldots, X_m) \mid \mathscr{G}_{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_m \leqslant n} \mathbb{E}\left(\phi(X_{k_1}, \ldots, X_{k_m}) \mid \mathscr{G}_{n+1}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(U_{m,n} \mid \mathscr{G}_{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Also ist

$$U_n^{\#} := U_{m,-\nu}, \quad \mathscr{G}_n^{\#} := \mathscr{G}_{-\nu} \quad \text{mit} \quad \nu = -n \in -\mathbb{N}_0,\ \nu \leqslant -m$$

ein Rückwärtsmartingal. Insbesondere existiert der f.s. und L^1-Grenzwert.

(d) Gemäß Satz 8.7 ist der nach Teilaufgabe (c) existierende Grenzwert

$$U = \lim_n U_n^{\#} \quad \text{von der Form} \quad U = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_m)$$

für eine Symmetrische Funktion ϕ und permutierbare iid ZV $(X_1, X_2, X_3, \ldots)$. Damit gilt $U = \mathbb{E}U$ und wegen der L^1-Konvergenz haben wir

$$\mathbb{E}U = \lim_n \mathbb{E}U_n^{\#} = \mathbb{E}\phi(X_1, \ldots, X_m).$$

■■

Aufgabe 8.9. Lösung: Die Funktion $\mathbb{1}_{\#\{n \in \mathbb{N} : X_n \in B\} = \infty}$ ist symmetrisch. Damit gilt nach Hewitt–Savage $\mathbb{P}(\#\{n \in \mathbb{N} : X_n \in B\} = \infty) \in \{0, 1\}$ und die Behauptung folgt.

■■

9 Elementare Ungleichungen für Martingale

Aufgabe 9.1. Lösung: Es ist $(-X_n)_n$ ein sub-MG. Wir wenden nun die Maximalungleichung 9.2 an: für $r > 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{n\leqslant N} X_n > r\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(\sup_{n\leqslant N} X_n \geqslant r\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\inf_{n\leqslant N}(-X_n) \leqslant -r\right)\\
&\overset{9.2}{\leqslant} \frac{1}{r}\Big[\mathbb{E}\underbrace{(-X_n)^+}_{=0} - \mathbb{E}(-X_0)\Big]\\
&= \frac{1}{r}\mathbb{E}X_0.
\end{aligned}
$$

Wegen $\{\sup_n X_n > r\} = \bigcup_N \{\sup_{n\leqslant N} X_n > r\}$ folgt die Behauptung mit Maßstetigkeit für $N \uparrow \infty$.

Aufgabe 9.2. Lösung: Es sei $\mathscr{F}_n = \sigma(U_1, \dots, U_n)$.

(a) Offensichtlich gilt $Z_{n+1} = Z_n\left(\frac{q}{p}\right)^{U_{n+1}}$. Weil $U_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_n$ und da Z_n $\mathscr{F}_n$-messbar ist, folgt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) &= Z_n\,\mathbb{E}\left[\left(\tfrac{q}{p}\right)^{U_{n+1}} \mid \mathscr{F}_n\right]\\
&= Z_n\,\mathbb{E}\left[\left(\tfrac{q}{p}\right)^{U_{n+1}}\right]\\
&= Z_n\left[\tfrac{q}{p}\,\mathbb{P}(U_{n+1} = 1) + \tfrac{p}{q}\,\mathbb{P}(U_{n+1} = -1)\right]\\
&= Z_n\left[\tfrac{q}{p}\,p + \tfrac{p}{q}\,q\right] = Z_n.
\end{aligned}
$$

(b) Im Fall $p \geqslant q$ ist die erste Ungleichung trivial und nicht sonderlich interessant. Sei also $p < q$. Dann gilt

$$
\sup_n S_n \geqslant k \iff \sup_n Z_n = \sup_n \left(\tfrac{q}{p}\right)^{S_n} \geqslant \left(\tfrac{q}{p}\right)^k
$$

und indem wir die Maximalungleichung anwenden, erhalten wir

$$
\mathbb{P}\left(\sup_n S_n \geqslant k\right) = \mathbb{P}\left(\sup_n Z_n \geqslant \left(\tfrac{q}{p}\right)^k\right) \leqslant \left(\tfrac{p}{q}\right)^k \mathbb{E}Z_0 = \left(\tfrac{p}{q}\right)^k
$$

Die zweite Ungleichung folgt so: es ist $\mathbb{E}Y \leqslant \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}(Y \geqslant k)$ für jede positive ZV $Y \geqslant 0$. Damit

$$
\mathbb{E}\left(\sup_n S_n\right) \leqslant \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}\left(\sup_n S_n \geqslant k\right) \leqslant \sum_{k=0}^\infty \left(\tfrac{p}{q}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{p}{q}} = \frac{q}{q-p}
$$

Aufgabe 9.3. Lösung: Wenn X_n ein MG ist, dann ist $e^{\xi(X_n-X_0)}$ für $\xi \geqslant 0$ ein positives Sub-MG. Nun seien $p \geqslant 1$ und $q \geqslant 1$ konjugiert, d.h. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Daher finden wir in Ungleichung (9.10)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_n (X_n - X_0) \geqslant t\right) &= \mathbb{P}\left(e^{\sup_n \xi(X_n-X_0)} \geqslant e^{t\xi}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sup_n e^{\xi(X_n-X_0)} \geqslant e^{t\xi}\right) \\
&\leqslant e^{-t\xi}\mathbb{E}\left(\sup_n e^{\xi(X_n-X_0)}\right) \\
&= e^{-t\xi}\mathbb{E}\left(\left[\sup_n e^{\frac{1}{p}\xi(X_n-X_0)}\right]^p\right) \\
&\leqslant e^{-t\xi} q^p sup_n \mathbb{E}\left(\left[e^{\frac{1}{p}\xi(X_n-X_0)}\right]^p\right) \\
&= q^p e^{-t\xi}\mathbb{E}\left(e^{\xi(X_n-X_0)}\right) \\
&\leqslant q^p e^{-t\xi+\xi^2 d_n^2/2} = q^p e^{-\frac{1}{2}t^2/d_n^2+\frac{1}{2}(\xi d_n - t/d_n)^2}.
\end{aligned}$$

Für $p \to \infty$ folgt $q^p \to e$.

---

10 Die Burkholder–Davis–Gundy Ungleichungen

Aufgabe 10.1. Lösung: $\boxed{\text{Tippfehler in der Angabe: } [X,Y]_n := X_0Y_0 + \sum_{i=1}^n \dots}$

(a) Das folgt unmittelbar aus den Beziehungen

$$4\Delta X_i \Delta Y_i = (\Delta X_i + \Delta Y_i)^2 - (\Delta X_i - \Delta Y_i)^2 = (\Delta(X_i + Y_i))^2 - (\Delta(X_i - Y_i))^2$$

und

$$2\Delta X_i \Delta Y_i = (\Delta X_i + \Delta Y_i)^2 - (\Delta X_i)^2 - (\Delta Y_i)^2 = (\Delta(X_i + Y_i))^2 - (\Delta X_i)^2 - (\Delta Y_i)^2 .$$

(b) Die erste Ungleichung folgt aus

$$(\Delta(X_i + Y_i))^2 (\Delta X_i + \Delta Y_i)^2 \leqslant 2(\Delta X_i)^2 + 2(\Delta Y_i)^2.$$

Die zweite Ungleichung ist einfach die Minkowski-Ungleichung für die ℓ^2-Norm (setze $X_{-1} = Y_{-1} = 0$):

$$\sqrt{\sum_{i=0}^n (\Delta X_i + \Delta Y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^n (\Delta X_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=0}^n (\Delta Y_i)^2}.$$

(c) Wir wissen aus Lemma 10.8, dass $X^2 - [X]$ ein MG ist. Andererseits ist auch $X^2 - \langle X \rangle$ ein MG (Definition 3.8), also ist $[X] - \langle X \rangle = (X^2 - \langle X \rangle) - (X^2 - [X])$ ein MG.

■■

Aufgabe 10.2. Lösung: Für $i = k$ ist nichts zu zeigen. Ohne Einschränkung sei $i - 1 < i \leqslant k - 1 < k$. Dann haben wir mit der tower property und einem pull-out

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\Delta X_i \Delta Y_k\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[\Delta X_i \Delta Y_k \mid \mathscr{F}_{k-1}\right]\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\Delta X_i \mathbb{E}\left[\Delta Y_k \mid \mathscr{F}_{k-1}\right]\right) = 0\end{aligned}$$

weil $\mathbb{E}\left[\Delta Y_k \mid \mathscr{F}_{k-1}\right] = 0$ gilt.

■■

Aufgabe 10.3. Lösung: Wir haben für $x \geqslant 0$

$$\mathbb{E}e^{x|X_n|} \leqslant \mathbb{E}e^{xX_n} + \mathbb{E}e^{-xX_n}$$

und es gilt

$$\mathbb{E}e^{\pm xX_n} = e^{\pm x\sum_{i=1}^n c_i\xi_i} = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}e^{\pm xc_i\xi_i} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2}\left(e^{xc_i} + e^{-xc_i}\right) = \prod_{i=1}^n \cosh(xc_i)$$

und nun verwenden wir $\cosh(xc_i) \leqslant e^{x^2c_i^2}$ und erhalten

$$\mathbb{E}e^{x|X_n|} \leqslant 2e^{x^2d_n^2}.$$

Mithin

$$\mathbb{P}(|X_n| \geqslant t) = \mathbb{P}(e^{x|X_n|} \geqslant e^{xt}) \leqslant e^{-xt}\mathbb{E}e^{x|X_n|} \leqslant 2e^{x^2d_n^2-xt}$$

und wir wählen nun $x = t/2d_n^2$.

Aufgabe 10.4. Lösung: Offensichtlich ist X ein Submartingal bezüglich der natürlichen Filtration $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1,\dots,\xi_n)$. Wenn $\sum_{n=1}^\infty a_n < \infty$, dann ist X auch L^1-beschränkt. Weiterhin ist

$$X_n^\oplus = \sup_k \mathbb{E}(X_{n+k}^+ \mid \mathscr{F}_n) = X_n + \sum_{i\geqslant n+1} a_i$$

und somit

$$X_n^\ominus = X_n^\oplus - X_n = \sum_{i\geqslant n+1} a_i.$$

Insbesondere ist

$$\sup_n \mathbb{E}(|X_n|) \overset{X_n\geqslant 0}{=} \sup_n \mathbb{E}X_n = \sum_n a_n$$

und

$$\sup_n \mathbb{E}X_n^\oplus = \sum_n a_n \qquad \sup_n \mathbb{E}X_n^\ominus = X_0^\ominus = \sum_n a_n$$

also

$$\sup_n \mathbb{E}(|X_n|) \neq \sup_n \mathbb{E}X_n^\oplus + \sup_n \mathbb{E}X_n^\ominus.$$

Das zeigt, dass i.Allg. Aussage d) im Zusatz von Satz 10.14 für Submartingale nicht gilt.

Aufgabe 10.5. Lösung: Geht analog zum Beweis von Satz 10.6 auf S. 96.

Aufgabe 10.6. Lösung: **Natürlich ist $(X_n,\mathscr{F}_n)_n$ ein MG – auch wenn das in der Angabe nicht explizit gesagt wird.**

Zunächst bemerken wir, dass für $p > 1$ die BDG-Ungleichungen „mit Supremum“ (10.3) und „ohne Supremum“ (10.5) äquivalent sind, weil wir im Fall $p > 1$ die Doobsche Maximal-Ungleichung haben, vgl. Bemerkung 10.3.b.

Wir schreiben $f(t) \asymp g(t)$ wenn es Konstanten c, C mit $cf(t) \leqslant g(t) \leqslant Cf(t)$ und alle t gibt.

(b)⇒(a) Es sei $(B_n)_n$ vorhersagbar und $|B_n| = 1$. Die Ungleichung zeigt, dass wir notwendigerweise $X_0 = 0$ haben, sonst gilt sie nicht ($B \bullet X_0 = 0$ per def.). Dann gilt auch

$$[B \bullet X]_n = (B \bullet X)_0^2 + \sum_{i=1}^n B_i^2 (X_i - X_{i-1})^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1})^2 = [X]_n$$

Die BDG-Ungleichungen für X und $B \bullet X$ besagen dann

$$\mathbb{E}\left(|X_n|^p\right) \asymp \mathbb{E}\left([X_n]^{p/2}\right) = \mathbb{E}\left([B \bullet X]^{p/2}\right) \asymp \mathbb{E}\left(|B \bullet X|^p\right).$$

(a)⇒(b) Wenn (a) gilt, ist notwendig $X_0 = 0$. Wir folgen dem Hinweis und wenden die Khintchine-Ungleichung (Satz 10.6) in folgender Situation an ($\mathbb{P}'$ und $\mathbb{E}'$ sind die auf ω' zielende W-keit bzw. Erwartung)

$$B \bullet X_n(\omega, \omega') = \sum_{i=1}^n B_i(\omega') \Delta X_i(\omega) =: \sum_{i=1}^n \xi_i(\omega') c_i(\omega)$$

und wir erhalten für jedes feste ω mit der Khintchine-Ungleichung

$$\mathbb{E}'\left(\left|\sum_{i=1}^n \xi_i(\omega') c_i(\omega)\right|^p\right) \asymp \left(\sum_{i=1}^n c_i^2(\omega)\right)^{p/2}$$

und indem wir den Erwartungswert in ω bilden

$$\mathbb{E}\mathbb{E}'\left(\left|\sum_{i=1}^n \xi_i(\omega') c_i(\omega)\right|^p\right) \asymp \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n c_i^2(\omega)\right)^{p/2}\right] = \mathbb{E}\left[[X]^{p/2}\right].$$

Aufgrund der Voraussetzung und mit dem Satz von Fubini wissen wir aber auch

$$\mathbb{E}\mathbb{E}'\left(\left|\sum_{i=1}^n \xi_i(\omega') c_i(\omega)\right|^p\right) = \mathbb{E}'\mathbb{E}\left(\left|B \bullet X_n(\omega, \omega')\right|^p\right) \asymp \mathbb{E}|X_n|^p$$

und die Behauptung folgt.

■■

11 Zufällige Irrfahrten auf $\mathbb{Z}^d$ – erste Schritte

Aufgabe 11.1. Lösung:

(a) OE sei $X_0 = 0$. Wir schreiben ℓ und r für die Zahl der Schritte nach links bzw. nach rechts. Nun gilt: $n = \ell + r$ und $k = X_n = r - \ell$. Daher gilt $n + k = 2r \in 2\mathbb{N}_0$, d.h. $n + k$ ist gerade, was nur sein kann, wenn entweder „n und k gerade“ oder „n und k ungerade“ sind.

Wenn wir das System $n = \ell + r$ und $k = r - \ell$ auflösen, erhalten wir

$$r = \frac{n+k}{2} \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \ell = \frac{n-k}{2} \in \mathbb{N}_0.$$

(b) Zunächst gelte $n + k \in 2\mathbb{N}_0$. Aus den n Schritten wählen wir $r = \frac{1}{2}(n+k)$ Schritte nach rechts aus, was auf $\binom{n}{r}$ Arten geht. Mithin

$$\mathbb{P}(X_n - X_0 = k) = \binom{n}{r} p^r q^\ell = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{1}{2}(n+k)} q^{\frac{1}{2}(n-k)}.$$

Wenn $n + k$ ungerade ist, gilt $\mathbb{P}(X_n - X_0 = k) = 0$. Wenn wir also die Konvention $\binom{n}{\frac{n+k}{2}} := 0$ für $n + k$ ungerade verwenden, können wir $\mathbb{P}(X_n - X_0 = k)$ in einer geschlossenen Form angeben.

■■

Aufgabe 11.2. Lösung: Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathscr{F}_n$ die von $X_0, X_1, \dots, X_n$ erzeugte Filtration, d. h. $\mathscr{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$. Dann gilt für $x \neq 0$, dass

$$\{T_x^\circ = n\} = \bigcap_{i=1}^{n-1} \underbrace{\{X_i \neq x\}}_{\in \mathscr{F}_i} \cap \underbrace{\{X_n = x\}}_{\in \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n$$

wobei wir benutzt haben, dass $\mathscr{F}_i \subseteq \mathscr{F}_n$ für alle $i \leqslant n$. Damit folgt

$$\{T_x^\circ \leqslant n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \underbrace{\{T_x^\circ = k\}}_{\in \mathscr{F}_k} \in \mathscr{F}_n.$$

Wegen $X_0 \equiv 0$ gilt $\{T_0^\circ = 0\} = \{X_0 = 0\} = \Omega \in \mathscr{F}_0$, insgesamt ist daher T_x° ist eine $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$-Stoppzeit.

Offensichtlich gilt $T_x = T_x^\circ$, wenn $x \neq 0$. Wenn $x = 0$, dann ist $T_0^\circ = 0$ während $T_0 \geqslant 2$ gilt. Insbesondere folgt, dass T_x auch eine Stoppzeit ist. Das kann man auch – wie oben

– direkt sehen, weil in diesem Fall die Formel

$$\{T_x = n\} = \bigcap_{i=1}^{n-1} \underbrace{\{X_i \neq x\}}_{\in \mathscr{F}_i} \cap \underbrace{\{X_n = x\}}_{\in \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n$$

sogar für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt.

Es gilt $T(a,b) = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n \notin (a,b)\} = \min\{n : X_n = a \text{ oder } X_n = b\} = T_a \wedge T_b$ und daher ist auch $T(a,b)$ eine Stoppzeit. Beachte: wir haben hier verwendet, dass X_n das Intervall (a,b) nur verlassen kann, wenn es durch einen der Endpunkte geht, d.h. wir verwenden hier die Tatsache, dass ein SRW nur Schrittgröße ±1 hat.

■■

Aufgabe 11.3. Lösung: Der Fall $d = 1$ ist bereits in Satz 11.11 behandelt worden.

Nun sei $d = 2$. Es sei $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ gegeben. Setze $T_y = \inf\{n : X_n = y\}$. Lemma 11.13 gilt wörtlich auch für $\bar{u}_n = \mathbb{P}(X_n = y)$ und $\bar{f}_n = \mathbb{P}(T_y = n)$.

Wir müssen also nur $\bar{u}_n$ wie im Beweis von Satz 11.14 ausrechnen. OE sei y im ersten Quadranten, d.h. $y_1, y_2 \geqslant 0$. Dann haben wir für alle n

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{2n+|y|} &= \sum_{\alpha+\beta=n} \binom{2n+y_1+y_2}{\alpha+y_1, \alpha, \beta+y_2, \beta} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+|y|} \\
&= \binom{2n+|y|}{n+y_1} \sum_{\alpha+\beta=n} \binom{n+y_1}{\beta}\binom{n+y_2}{\alpha} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+|y|} \\
&= \binom{2n+|y|}{n+y_1}^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+|y|} \\
&= \left(\frac{1}{4^n}\binom{2n+|y|}{n+y_1}^2\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{|y|} \approx \frac{c}{n}.
\end{aligned}$$

Beachte: $u_{2n+1+|y|} = 0$. Wenn wir nämlich den beobachteten Pfad $X_0 \to X_{2n+1+|y|} = y$ mit einem weiteren Pfad, der in $|y|$ Schritten direkt von 0 nach y geht, vereinigen, dann ist die Vereinigung der Pfade eine Null-Exkursion mit $2n+1+|y|+|y|$ Schritten, was nicht möglich ist.

Beachte: wir haben in der Rechnung die Vandermonde-Faltung verwendet

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{M}{k}\binom{N}{n-k} = \sum_{i+j=n} \binom{M}{i}\binom{N}{j} = \binom{M+N}{n}.$$

Die kann man wie in [Schilling-WT, Aufgabe 3.12] mit kombinatorischen Überlegungen zeigen: Zähle die Zahl der Pfade von $(0,0)$ nach (M,N) in einem Rechteck auf zwei Arten: (a) direkt und (b) so, dass man auf der Diagonalen einen Zwischenstopp einlegt.

■■

Aufgabe 11.4. Lösung:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}T &= \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(T=n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(T=n) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}\mathbb{P}(T=n) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(T \geqslant i) = \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(T > i-1) = \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{P}(T > i).\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 11.5. Lösung: Wegen $\mathbb{P}(\xi \in dx, Y \in dy) = \mathbb{P}(\xi \in dx)\mathbb{P}(Y \in dy)$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f(\xi,\xi+Y) &\iint f(x,x+y)\mathbb{P}(\xi \in dx, Y \in dy) \\ &= \iint f(x,x+y)\mathbb{P}(\xi \in dx)\,\mathbb{P}(Y \in dy) = \int \mathbb{E}f(\xi,\xi+y)\,\mathbb{P}(Y \in dy),\end{aligned}$$

und die andere Formel folgt analog mit Fubini.

■■

Aufgabe 11.6. Lösung: Es sei $X_0 = 0$ und $x > 0$. Mit dem SLLN sehen wir

$$X_n - X_0 = n \cdot \underbrace{\frac{X_n - X_0}{n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} p-q} \xrightarrow{n\to\infty} \operatorname{sgn}(p-q)\infty \qquad \text{f.s.}$$

(Hier verwendet: Für eine Folge $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ gilt $n \cdot a_n \to \infty$ falls $a > 0$ und $n \cdot a_n \to -\infty$ falls $a < 0$.) Für $p > q$ erhalten wir also

$$X_n = (X_n - X_0) + X_0 \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \qquad \text{f.s.}$$

Da beim SRW die Schrittweite 1 beträgt (wir gehen immer genau einen Schritt nach links oder nach rechts) und wir in $X_0 = 0$ starten, folgt daraus schon, dass für fast alle $\omega \in \Omega$ ein $N = N(\omega) \in \mathbb{N}$ existiert mit $X_N(\omega) = x$. Folglich, $T_x \leqslant N < \infty$ fast sicher.

■■

Aufgabe 11.7. Lösung: $\binom{2n}{n}$ ist die Zahl der n-elementigen Mengen aus einer Grundmenge mit $2n$ Elementen.

Nun färben wir die Elemente der $2n$-elementigen Menge so ein, dass genau n Elemente rot und n Elemente schwarz sind. $\binom{n}{r}\binom{n}{s}$ mit $r + s = n$ ist die Zahl der n-elementigen Mengen wobei genau s Elemente schwarz und die restlichen $r = n - s$ Elemente rot sind. Wenn wir nun über $r + s = n$ und $r \in \{0, \dots, n\}$, variieren und summieren, erhalten wir die behauptete Formel.

Variante: Wir verwenden das Koordinatensystem $\{0, 1, 2, \dots, n\}^2$. $\binom{2n}{n}$ gibt die Zahl der Wege von $(0,0) \to (n,n)$ in $2n$ Schritten an.

Mit r bezeichnen wir einen Schritt nach rechts, mit s einen nach oben.

$\binom{n}{r}\binom{n}{s}$ ist die Zahl der Wege von $(0,0) \to (r, n-r)$ (in n Schritten) und dann wegen $s = n - r$ von $(n-s, s) \to (n,n)$, d.h. wir legen an einem Punkt einen Zwischenstopp ein. Nun summieren wir über alle möglichen Zwischenstopps und erhalten wiederum die behauptete Formel.

Aufgabe 11.8. Lösung: Offensichtlich ist die Behauptung äquivalent zu $m!m!m! \leqslant a!b!c!$ für alle $a,b,c \in \mathbb{N}_0$ mit $a+b+c=3m$. Für $a=b=c=m$ ist nichts zu zeigen. Sei $a>m>b$ und $c \in \mathbb{N}_0$ beliebig mit $c=3m-a-b$. Wir können a um 1 verringern und b um 1 vergrößern. Dann gilt immer noch $a-1 \geqslant m \geqslant b+1$ sowie

$$(a-1)!(b+1)!c! \leqslant a!b!c! \iff (a-1)!(b+1)! \leqslant a!b! \iff b+1 \leqslant a.$$

Indem wir diese Prozedur so lange wiederholen, ggf. indem wir auch c an Stelle von b betrachten, bis $a-1=m$ gilt, folgt die Behauptung.

Aufgabe 11.9. Lösung: Dimension $d=1$: Im ersten Schritt des Beweises von Teil a müssen wir $(\frac{1}{2})^n(\frac{1}{2})^n$ und $(\frac{1}{4})^n$ durch p^nq^n und $(pq)^n$ austauschen. Damit ergibt sich

$$\mathbb{P}(X_{2n}=0) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n.$$

Weil aber $4pq<1$ gilt, ist die Reihe $\sum_n \mathbb{P}(X_{2n}=0)$ konvergent, d.h. der SRW ist transient.

Dimension $d=2$: Wir schreiben

$$\mathbb{P}(\xi_1=(1,0))=p, \quad \mathbb{P}(\xi_1=(-1,0))=q, \quad \mathbb{P}(\xi_1=(0,1))=r, \quad \mathbb{P}(\xi_1=(0,-1))=s.$$

Die Rechnung in Schritt 2 des Beweises von Teil a ändert sich entsprechend zu

$$\mathbb{P}(X_{2n}=0) \approx \frac{1}{n}(4pq)^n(4rs)^n$$

und weil wenigstens einer der Ausdrücke $4pq$ oder $4rs$ strikt kleiner als 1 ist, konvergiert auch die Reihe $\sum_n \mathbb{P}(X_{2n}=0)$, d.h. wir haben Transienz.

Aufgabe 11.10. Lösung:

(a) Wir schreiben

$$p_{k,l} = \mathbb{P}((X_1,Y_1)=(k,l)).$$

Auf Grund der Unabhängigkeit der Prozesse ergibt sich

$$p_{k,l} == \mathbb{P}(X_1=k)\mathbb{P}(Y_1=l).$$

Da wir zusätzlich wissen, dass X und Y symmetrische SRW sind, folgt

$$\mathbb{P}((X_1,Y_1)=(\pm 1,\pm 1)) = \frac{1}{4}.$$

(b) Wir setzen $\rho := (\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\rho_n := \frac{1}{\sqrt{2}} R\binom{X_n}{Y_n}$. Die Rotationsmatrix R ist gegeben durch

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da Y, X unabhängige SRW sind, finden wir unabhängige iid Folgen $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ und $Y_n = \sum_{i=1}^n \eta_i$, $\mathbb{P}(\xi_1 = \pm 1) = \mathbb{P}(\eta_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit

$$\rho_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\xi_i - \eta_i) \\ \frac{1}{2}(\xi_i + \eta_i) \end{pmatrix}}_{=:\zeta_i}.$$

Die Zufallsvariablen ζ_i sind offenbar wieder iid (da $(\xi_i)_i$ und $(\eta_i)_i$ unabhängige iid Folgen sind) und es gilt gerade $\mathbb{P}(\zeta_1 = \pm e_j) = \frac{1}{4}$ für $j = 1, 2$ (da $\mathbb{P}(\xi_1 = \pm 1) = \mathbb{P}(\eta_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$).

■■

Aufgabe 11.11. Lösung: Wir zeigen zuächst, dass $\bar{Y}_n = \bar{X}_{N(n)}$ eine einfache symmetrische Irrfahrt in $\mathbb{Z}^3$ ist; wir werden daraus folgern, dass X_n transient ist.

Es sei $e = (1, 0, 0) \in \mathbb{Z}^3$. Dann haben wir (ua bedeutet „unabhängig")

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bar{Y}_1 = e) &= \mathbb{P}(\bar{X}_{N(1)} = e) \\
&= \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(\bar{X}_k = e \mid N(1) = k)\mathbb{P}(N(1) = k) \\
&= \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(\bar{X}_k = e,\, N(1) = k) \\
&= \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(\bar{X}_k = e, \bar{X}_1 = 0, \dots, \bar{X}_{k-1} = 0) \\
&= \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(\bar{X}_k - \bar{X}_{k-1} = e, \bar{X}_{k-1} = 0, \dots, \bar{X}_1 = 0) \\
&\overset{\text{ua}}{=} \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(\bar{X}_k - \bar{X}_{k-1} = e)\mathbb{P}(\bar{X}_{k-1} = 0, \dots, \bar{X}_1 = 0) \\
&= \mathbb{P}(\bar{X}_1 = e) \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(\bar{X}_{k-1} = 0, \dots, \bar{X}_1 = 0) \\
&= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(\bar{X}_{k-1} = 0, \dots, \bar{X}_1 = 0).
\end{aligned}$$

Nun berechnen wir die Summe $\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(\bar{X}_{k-1} = 0, \dots, \bar{X}_1 = 0)$. Dazu schreiben wir

$$\xi_i = (\xi_i^1, \dots, \xi_i^4) = X_i - X_{i-1} \in \mathbb{Z}^4.$$

Offensichtlich gilt

$$\mathbb{P}(\xi_i = e_n) = \mathbb{P}(\xi_i = -e_n) = \frac{1}{8}, \quad n = 1, 2, 3, 4,$$

mithin

$$\mathbb{P}(\bar{X}_1 = 0, \dots, \bar{X}_{k-1} = 0) = \left(\frac{4-3}{4}\right)^{k-1}, \quad k \geqslant 1$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\bar{X}_{k-1} = 0, \dots, \bar{X}_1 = 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{4}{3}.$$

Daraus folgt dann

$$\mathbb{P}(\bar{Y}_1 = e) = \frac{1}{6}.$$

Der Prozess $(\bar{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine einfache symmetrische Irrfahrt in $\mathbb{Z}^3$, damit transient, d.h. $P(T_0^{\bar{Y}} < \infty) < 1$, wobei T_0^X die erste Rückkehrzeit eines Prozesses X nach 0 ist. Schließlich folgt damit

$$\mathbb{P}(T_0^X < \infty) \leqslant \mathbb{P}(T_0^{\bar{X}} < \infty) \leqslant \mathbb{P}(T_0^{\bar{Y}} < \infty) < 1.$$

Der Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also transient.

■■

Aufgabe 11.12. Lösung: Da $X = (X^1, X^2)$ ein SRW ist, gilt $\mathbb{P}((X^1, X^2) = e) = p_e$ für $e \in \mathbb{Z}^2$ mit $|e| = 1$ und $\sum_{|e|=1} p_e = 1$. Weil der RW sich bei jeden Schritt nur in je einer Koordinate ändern kann, könnwn wir o.E. annehmen, dass $\mathbb{P}(X_1^1 = 1, X_n^2 = i \mid X_{n-1}^2 = i) = p \neq \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}(X_1^1 = -1, X_n^2 = i \mid X_{n-1}^2 = i) = q = 1 - p \neq \frac{1}{2}$ gelte – hier geht die nicht-Rotationsinvarianz ein: die p_e sind nicht alle gleich. Setze

$$N(0) := 0 \quad \text{und} \quad N(n) := \inf\left\{m > N(n-1) \,:\, X_m^1 \neq X_{N(n-1)}^1\right\}.$$

Dann ist $\bar{X} := (X_{N(n)}^1)_n$ ein nicht-symmetrischer, eindimensionaler SRW. Dieser ist transient, damit ist X transient.

■■

12 Fluktuationen einer einfachen Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$

Aufgabe 12.1. Lösung: $\boxed{\text{Achtung: Tippfehler in der Angabe. } \sigma_{2n} \to T_0.}$ Es gilt

$$\{T_0 = 2k\} = \{X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, \dots, X_{2k-1} \neq 0, X_{2k} = 0\}.$$

Da die ,,Exkursionen" nach oben und nach unten gleichwahrscheinlich sind, und da nur der erste Schritt die ,,Richtung" der Exkursion bestimmt

$$\begin{aligned}
f_{2k} &= \mathbb{P}(X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, \dots, X_{2k-1} \neq 0, X_{2k} = 0)\\
&= 2\,\mathbb{P}(X_1 > 0, X_2 > 0, \dots, X_{2k-1} > 0, X_{2k} = 0)\\
&= 2\,\#(X_1 > 0, X_2 > 0, \dots, X_{2k-1} > 0, X_{2k} = 0)/2^{2k}\\
&= 2\,\#(X_1 > 0, X_2 > 0, \dots, X_{2k-1} = 1)/2^{2k}\\
&= 2 \cdot 2^{-2k} \cdot \frac{1}{2k-1}\binom{2k-1}{k}\\
&= 2 \cdot 2^{-2k} \cdot \frac{1}{2k-1} \cdot \frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!}\\
&= 2 \cdot 2^{-2k} \cdot \frac{(2k-2)!}{(k-1)!(k-1)!} \cdot \frac{1}{k}\\
&= 2^{-2(k-1)} \cdot \frac{(2k-2)!}{(k-1)!(k-1)!} \cdot \frac{1}{2k}\\
&= \frac{1}{2k}\, u_{2(k-1)}.
\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 12.2. Lösung: Betrachte den neuen SRW $X'_n := X_{n+1} - X_1$, der von $\xi_1 = X_1$ unabhängig ist und sich sonst wie der ursprüngliche RW verhält. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 > 0, X_2 > 0, \dots, X_{2n} > 0) &= \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 > 0, \dots, X_{2n} > 0)\\
&= \mathbb{P}(X_1 = 1, X'_1 \geqslant 0, \dots, X'_{2n-1} \geqslant 0)\\
&= \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X'_1 \geqslant 0, \dots, X'_{2n-1} \geqslant 0)\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X'_1 \geqslant 0, \dots, X'_{2n-1} \geqslant 0)\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_1 \geqslant 0, \dots, X_{2n-1} \geqslant 0)
\end{aligned}$$

Das zeigt die erste Gleichheit. Die zweite Gleichheit folgt nun mit Hilfe von Lemma 12.8: Aus $X_{2n-1} \geqslant 0 \implies X_{2n-1} > 0$ (genauer $X_{2n-1} \in \{1, 3, 5, 7, \dots\}$), da $2n-1$ ungerade ist und damit folgt $X_{2n} \geqslant 0$. Mithin

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 \geqslant 0, \dots, X_{2n} \geqslant 0) &= \mathbb{P}(X_1 \geqslant 0, \dots, X_{2n-1} \geqslant 0) && \text{vorangehende Überlegung}\\
&= 2\mathbb{P}(X_1 > 0, \dots, X_{2n-1} > 0, X_{2n} > 0) && \text{erste Identität}\\
&= \mathbb{P}(X_1 \neq 0, \dots, X_{2n-1} \neq 0, X_{2n} \neq 0) && \text{Symmetrie}\\
&= \mathbb{P}(X_{2n} = 0) && \text{Lemma 12.8.}
\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 12.3. Lösung: Wir haben $\mathbb{P}(M_n \geqslant x) = \mathbb{P}(X_n \geqslant x) + \mathbb{P}(X_n > x) = \mathbb{P}(X_n \geqslant x) + \mathbb{P}(X_n \geqslant x+1)$ und ebenso $\mathbb{P}(M_n \geqslant x+1) = \mathbb{P}(X_n \geqslant x+1) + \mathbb{P}(X_n \geqslant x+2)$. Somit ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_n = x) &= \mathbb{P}(M_n \geqslant x) - \mathbb{P}(M_n \geqslant x+1)\\
&= \mathbb{P}(X_n \geqslant x) - \mathbb{P}(X_n \geqslant x+2)\\
&= \mathbb{P}(X_n = x) + \mathbb{P}(X_n = x+1).
\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 12.4. Lösung: Offensichtlich gilt $\{T_0^{(k)} = n\} = \emptyset \in \mathscr{F}_n$ wenn $n < k$ oder wenn n ungerade ist. Sei also $n \geqslant k$ und $n \in 2\mathbb{N}_0$. Wir haben

$$\{T_0^{(k)} = n\} = \bigcup_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} < n} \{X_{i_1} = \dots = X_{i_{k-1}} = X_n = 0\} \cap \left\{X_i \neq 0, i \neq i_j, \begin{matrix} 0 < i < n \\ 0 < j < k \end{matrix}\right\}$$

und diese Menge ist offenbar in $\mathscr{F}_n$ enthalten.

Die letzte Besuchszeit der Null im Intervall $[0, 2n] \cap \mathbb{N}_0$ ist keine Stoppzeit, weil z.B. $\{L_0 = 2n-2\}$ nicht $\mathscr{F}_{2n-2}$-messbar ist, da wir die letzten beiden Schritte kennen müssen: $X_{2n-1} \neq 0$ und $X_{2n} \neq 0$.

■■

---

13 Rekurrenz und Transienz allgemeiner Irrfahrten

Aufgabe 13.1. Lösung: Weil die Schritte $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid sind, haben wir (vgl. Lemma 8.13 oder Lemma 3.9)

$$\langle X\rangle_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(\xi_i \mid \mathscr{F}_{i-1}) \overset{\mathbb{E}\xi_i=0}{=} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\xi_i^2 \mid \mathscr{F}_{i-1}) \overset{\xi_i \perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_{i-1}}{=} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\xi_i^2) \overset{\xi_i\sim\xi_1}{=} n\mathbb{E}(\xi_1^2).$$

Zusammen mit Lemma 8.13 erhalten wir

$$\{\exists \lim_n X_n \in \mathbb{R}\} \overset{8.13}{=} \{\lim_n \langle X\rangle_n < \infty\} \overset{\text{f.s.}}{=} \varnothing,$$

d.h. die Irrfahrt muss f.s. oszillieren. Das zeigt die Richtung „$\Rightarrow$" in c).

Aufgabe 13.2. Lösung: Wir setzen $\xi_0 \equiv x$. Weil die ξ_i, $i \geqslant 1$, iid mit Verteilung μ sind, gilt

$$\mathbb{P}_{(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_n)} = \delta_x \otimes \underbrace{\mu \otimes \dots \otimes \mu}_{n \text{ Faktoren}}$$

Daher können wir für die Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ das Produktmaß $\delta_x \otimes \bigotimes_{i=1}^\infty \mu$ verwenden. Tatsächlich bleibt uns auch keine andere Wahl, weil die endlich-dimensionalen Verteilungen $\mathbb{P}_{(\xi_0,\dots,\xi_n)}$ die Projektionen des Produktmaßes eindeutig bestimmen.

Dieses Produktmaß können wir verwenden, um die Verteilungen von X_n zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n \in B) &= \int \mathbb{1}_B(X_n)\, d\mathbb{P} \\
&= \int\cdots\int \mathbb{1}_B(x_0 + x_1 + \dots + x_n)\, \mathbb{P}(\xi_0 \in dx_0, \xi_1 \in dx_1, \dots, \xi_n \in dx_n) \\
&= \int\cdots\int \mathbb{1}_B(x + x_1 + \dots + x_n)\, \mathbb{P}(\xi_1 \in dx_1, \dots, \xi_n \in dx_n) \\
&= \int\cdots\int \mathbb{1}_B(x + x_1 + \dots + x_n)\, \mu(dx_1)\dots\mu(dx_n) \\
&= \delta_x \star \bigstar_{i=1}^n \mu(B).
\end{aligned}$$

(Wir schreiben $\star$ bzw. $\bigstar$ für die Faltung.)

Aufgabe 13.3. Lösung: Wir wählen eine σ-Algebra $\mathscr{B}^{\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ – entweder $\mathscr{P}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ (wenn die ξ_i diskret sind) oder das Produkt der Borelschen σ-Algebren $\bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Dann gilt nach

Definition

$$\mathscr{I} = \left\{\{\mathbb{X} \in B\} : B \in \mathscr{B}^{\mathbb{N}}\right\} = \mathbb{X}^{-1}(\mathscr{B}^{\mathbb{N}})$$

und das Urbild einer σ-Algebra ist selbst eine σ-Algebra.

Wenn T terminal ist, dann gilt für ein geeignetes $B \in \mathscr{B}^{\mathbb{N}}$, dass $T = \{(\xi_{n+1}, \xi_{n+2} \dots) \in B\} = \{\mathbb{X} \in \Omega^n \times B\}$. Anschaulich heißt das, dass eine terminale Menge, da Sie nur von beliebig großen Indizes beeinflußt wird, nicht von den ersten (endlich vielen) Indices $1, 2, \dots, n$ abhängt. Daher können wir diese $\xi_1, \dots, \xi_n$ beliebig permutieren.

■■

Aufgabe 13.4. Lösung: Es sei π eine Permutation der ersten m Indices. Offenbar gilt $\xi_{\pi(1)} + \dots + \xi_{\pi(m)} + \xi_{m+1} + \dots + \xi_n = X_n$, und daher sind die Mengen A und A' permutierbar: hier gehen nur große n ein.

I.Allg. ist A nicht terminal, da der Wert von X_n über die Frage $X_n \in B$ bzw. $X_n \in B$ entscheidet – und bei der Berechung dieses Werts gehen **alle** ξ_i ein (nicht aber deren Reihenfolge), d.h. A wird nicht terminal sein, aber immerhin noch permutierbar.

Sei m fest. A' genau dann von $\xi_1, \dots, \xi_m$ ab, wenn c_n **nicht** unbeschränkt ist. Also: A' ist immer permutierbar und wenn $(c_n')_n$ unbeschränkt ist, dann ist A' auch terminal im Kolmogorovschen Sinne.

■■

Aufgabe 13.5. Lösung: Wir haben $\mathbb{E}v(B_{r\epsilon}(0)) \leqslant cr^d \mathbb{E}v(B_\epsilon(0))$.

■■

Aufgabe 13.6. Lösung: Vgl. hierzu Satz 16.2 in [Schilling-WT].

■■

Aufgabe 13.7. Lösung: Wir wählen $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ beliebig. Die ZV $\xi X_k + \eta Y_k$ sind offenbar iid und es gilt

$$\mathbb{E}[\xi X_k + \eta Y_k] = \xi \mathbb{E} X_k + \eta \mathbb{E} Y_k = 0$$

sowie

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[\xi X_k + \eta Y_k] &= \xi^2 \mathbb{V} X_k + 2\xi\eta \operatorname{Cov}(X_k, Y_k) + \eta^2 \mathbb{V} Y_k \\ &= \xi^2 \sigma_X^2 + 2\xi\eta\sigma_{XY} + \eta^2\sigma_Y^2 \\ &= (\xi, \eta) \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ eta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Aus dem CLT in einer Dimension wissen wir, dass

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} (\xi X_k + \eta Y_k) \xrightarrow[n\to\infty]{d} G \sim \mathsf{N}(0, \gamma_{\xi,\eta})$$

mit $\gamma_{\xi,\eta} = \mathbb{V}[\xi X_k + \eta Y_k]$. Wir können aber G darstellen als $G \sim \xi G_1 + \eta G_2$, wobei G_1, G_2 Gauß-ZV mit $(G_1, G_2) \sim \mathsf{N}(0, \Gamma)$ sind. Damit folgt

$$\mathbb{E}e^{it\left\langle\binom{\xi}{\eta}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\binom{X_k}{Y_k}\right\rangle} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}e^{it\left\langle\binom{\xi}{\eta}\binom{G_1}{G_2}\right\rangle}$$

und wenn wir $t = 1$ wählen, können wir diesen Befund als d-Konvergenz von $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\binom{X_k}{Y_k}$ gegen $G = \binom{G_1}{G_2}$ interpretieren.

■■

Aufgabe 13.8. Lösung: Wir nehmen gleich $m \in L^1(dx)$ an, da in diesem Fall das Integral $\breve{m}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} m(x)e^{i\langle x,\xi\rangle}\,dx$ existiert.

Satz von Plancherel: $\int_{\mathbb{R}^d} \breve{m}(\xi)\,\nu(d\xi) = \int \breve{\nu}(\xi)m(\xi)\,d\xi$.

Beweis: Wir haben

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \breve{m}(\xi)\,\nu(d\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} m(x)e^{i\langle x,\xi\rangle}\,dx\right)\nu(d\xi)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle}\,\nu(d\xi)\right)m(x)\,dx\end{aligned}$$

Fubini! Beachte: $|e^{iz}| = 1$ und $\iint |m(x)|\,dx\,\nu(d\xi) = \|m\|_{L^1(dx)}\nu(\mathbb{R}^d) < \infty$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \breve{\nu}(x)m(x)\,dx.$$

Faltungssatz: $\widetilde{m * \nu}(\xi) = \breve{m}(\xi)\breve{\nu}(\xi)$.

Beweis: Wir haben

$$\begin{aligned}\widetilde{m * \nu}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} m * \nu(x)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle}\left(\int_{\mathbb{R}^d} m(x-y)\,\nu(dy)\right)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle}m(x-y)\,\nu(dy)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle}m(x-y)\,dx\,\nu(dy)\end{aligned}$$

Fubini! Begründung wie oben. Beachte $\|m(x-\cdot)\|_{L^1(dx)} = \|m\|_{L^1} < \infty$.

$$\begin{aligned}&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x+y,\xi\rangle}m(x)\,dx\,\nu(dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle}m(x)\,dx\,e^{i\langle y,\xi\rangle}\nu(dy)\\ &= \breve{m}(\xi)\breve{\nu}(\xi).\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 13.9. Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} h(x)e^{ix\theta}\,dx &= \int_{-1}^{1}(1-|x|)e^{ix\theta}\,dx\\
&= \int_0^1 (1-x)e^{ix\theta}\,dx + \int_0^1 (1-x)e^{-ix\theta}\,dx\\
&= \int_0^1 (1-x)\left(e^{ix\theta}+e^{-ix\theta}\right)dx\\
&= 2\,\mathrm{Re}\int_0^1 (1-x)e^{ix\theta}\,dx\\
&= 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{(1-x)e^{ix\theta}}{i\theta}\bigg|_0^1 + \frac{1}{i\theta}\int_0^1 e^{ix\theta}\,dx\right]\\
&= 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{(1-x)e^{ix\theta}}{i\theta} - \frac{e^{ix\theta}}{\theta^2}\right]_0^1\\
&= 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\theta}}{\theta^2} - \frac{1}{i\theta} - \frac{1}{\theta^2}\right]\\
&= 2\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}.
\end{aligned}$$

(b) Es gilt $\eta \geqslant \sin\eta \geqslant \eta\sin 1$ für alle $\eta \in [0,1]$ – das folgt aus der Konkavität von sin auf dem Intervall $[0,1]$, vgl. auch [Schilling-WT, Abbildung 7.1, S. 72]. Mithin gilt für $\theta \in [0,1]$

$$1-\cos\theta = \int_0^\theta \sin\eta\,d\eta \geqslant \int_0^\theta \eta\sin 1\,d\eta = \frac{\sin 1}{2}\,\theta^2.$$

(c) Wir haben

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)e^{ix\theta/a}\,dx \underset{a\,dy=dx}{\overset{y=x/a}{=}} a\int_{\mathbb{R}} h(ay)e^{iy\theta}\,dy = a\widehat{h(a\bullet)}(\theta).$$

Aufgabe 13.10. Lösung: *Umbeschriebener Würfel:* $S = 2r$ tut's offensichtlich.

Einbeschribener Würfel: s muß so sein, dass $2r$ die Länge der Diagonale in $Q_s(0)$ ist. Die Diagonale berechnet sich nach Pythatoras als

$$d\cdot s^2 = s_1^2 + \dots s_d^2 = (2r)^2 \implies s = \frac{2r}{\sqrt{d}}.$$

Aufgabe 13.11. Lösung: Wir haben

$$|e^z|^2 = e^z\overline{e^z} = e^z e^{\bar z} = e^{z+\bar z} = e^{2\,\mathrm{Re}\,z} = \left(e^{\mathrm{Re}\,z}\right)^2.$$

Weiter gilt

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{z} = \mathrm{Re}\,\frac{\bar z}{|z|^2} = \frac{\mathrm{Re}\,z}{|z|^2}$$

und daher

$$\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} z}{|z|^2} = \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \leqslant \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{(\operatorname{Re} z)^2} = 1.$$

■■

Aufgabe 13.12. Lösung: Es gilt

$$\check{\mu}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, 0\rangle} \, \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} 1 \, \mu(dx) = \mu(\mathbb{R}^d) = 1.$$

Mit dem Stetigkeitslemma [Schilling-MI, Satz 12.1] sieht man unmittelbar, dass $\theta \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \theta\rangle} \, \mu(dx)$ stetig ist.

Weil $\check{\mu}|_{\overline{B_1(0)}}$ gleichmäßig stetig ist, folgt auch die zweite Behauptung der Übung.

Bemerke: Es gilt sogar: $\check{\mu}$ ist auf ganz $\mathbb{R}^d$ gleichmäßig stetig. Das sieht man so:

$$\begin{aligned}
|\check{\mu}(\xi) - \check{\mu}(\eta)| &= \left|\mathbb{E} e^{i\langle \xi, X\rangle} - \mathbb{E} e^{i\langle \eta, X\rangle}\right| \\
&\leqslant \mathbb{E}\left(\left|e^{i\langle \xi, X\rangle} - e^{i\langle \eta, X\rangle}\right| \mathbb{1}_{\{|X|>R\}}\right) + \left|\mathbb{E}\left(\left(e^{i\langle \xi, X\rangle} - e^{i\langle \eta, X\rangle}\right) \mathbb{1}_{\{|X|\leqslant R\}}\right)\right| \\
&\leqslant 2\mathbb{P}(|X| > R) + \left|\int_{\overline{B_R(0)}} \left(e^{i\langle \xi, x\rangle} - e^{i\langle \eta, x\rangle}\right) \mu(dx)\right| \\
&\leqslant 2\mathbb{P}(|X| > R) + \int_{\overline{B_R(0)}} \left|e^{i\langle \xi, x\rangle} - e^{i\langle \eta, x\rangle}\right| \mu(dx) \\
&\leqslant 2\mathbb{P}(|X| > R) + \epsilon \mu\left(\overline{B_R(0)}\right) \\
&\leqslant 2\mathbb{P}(|X| > R) + \epsilon.
\end{aligned}$$

In der vorletzten Abschätzung haben wir verwendet, dass

$$\left|e^{i\langle x, \xi\rangle} - e^{i\langle x, \eta\rangle}\right| = \left|\int_{\langle x, \xi\rangle}^{\langle x, \eta\rangle} i e^{iz} \, dz\right| \leqslant |x| \cdot |\xi - \eta| \leqslant R|\xi - \eta|$$

auf $\overline{B_R(0)}$ gilt. Insgesamt folgt also die gleichmäßige Stetigkeit, wenn wir R so groß wählen, dass $\mathbb{P}(|X| > R) < \epsilon$ gilt.

■■

Aufgabe 13.13. Lösung: Wir folgen dem Hinweis und bemerken, dass $(Y_n)_n$ mit $Y_n := X_{n+1} - X_1 = X_n - \xi_n$ selbst eine Irrfahrt ist, die dieselbe Verteilung wie $(X_n)_n$ hat. Damit hat sie dasselbe stochastische Verhalten. Nun gilt aber $X_{2n+1} = Y_{2n} + \xi_1$. Daraus folgt unmittelbar

$$X_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}} \infty \iff Y_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}} \infty \implies X_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}} \infty$$

Denn wegen der Unabhängigkeit gilt

$$\mathbb{P}(\lim_n |Y_{2n} + \xi_1| = \infty) = \int \mathbb{P}(\lim_n |Y_{2n} + x| = \infty) \, \mathbb{P}(\xi_1 \in dx) = \int 1 \, \mathbb{P}(\xi_1 \in dx) = 1.$$

■■

Aufgabe 13.14. Lösung: Nach Voraussetzung gilt

$$\forall R > 0 \quad \exists N = N(R) \quad \forall n \geqslant N(R) : a_{2n} > R$$

und

$$\forall R > 0 \quad \exists M = M(R) \quad \forall n \geqslant M(R) : a_{2n+1} > R$$

also haben wir

$$\forall n \geqslant 2(N(R) + M(R)) + 1 : a_n > R.$$

■■

14 Irrfahrten und Analysis

Aufgabe 14.1. Lösung: Die Richtung (14.6)⇒(14.4) ist klar: wir nehmen einfach $Z = \mathbb{1}_F$. Umgekehrt können wir Z als $Z^+ - Z^-$ schreiben wobei $Z^\pm \in L^\infty(\mathscr{F}_T)$. Daher reicht es, (14.6) für $Z \geqslant 0$ zu zeigen.

Mit dem Sombrero-Lemma können wir $Z \in L^\infty(\mathscr{F}_T)$ durch einfache Funktionen Z_n der Gestalt $Z_n := \sum_{i=1}^{N_n} \phi_{i,n} \mathbb{1}_{F_{i,n}}$ mit $F_{i,n} \in \mathscr{F}_T$ und $\phi_{i,n} \in [0,\infty)$ gleichmäßig (! weil Z beschränkt ist [Schilling-MI, Lemma 7.11, Aufgabe 7.7]) von unten approximieren: $Z_n \uparrow Z$. Offensichtlich zeigt (14.4), dass

$$\mathbb{E}^x\left(Z_n \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} \cdot \Phi(X_{T+\bullet})\right) = \mathbb{E}^x\left(Z_n \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} \cdot \mathbb{E}^{X_T}\Phi(X_\bullet)\right).$$

Wir können in dieser Gleichheit den Grenzwert bilden und erhalten (14.6).

■■

Aufgabe 14.2. Lösung: Um von $\mathbb{E}$ zu $\mathbb{E}^x$ überzugehen, ersetzen wir f und g durch $f(\cdot + x)$ und $g(\cdot + x)$. Das sind nach wie vor beschränkte Funktionen.

Wir zeigen nun die behauptete Gleichheit:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} f(X_T) g(X_{n+T}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[f(X_k) g(X_{n+k}) \mathbb{1}_{\{T=k\}}] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[f(X_k) g((X_{n+k} - X_k) + X_k) \mathbb{1}_{\{T=k\}}] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[f(X_k) \int g(y + X_k)\, \mathbb{P}((X_{n+k} - X_k) \in dy) \mathbb{1}_{\{T=k\}}] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[f(X_k) \int g(y + X_k)\, \mathbb{P}(X_n \in dy) \mathbb{1}_{\{T=k\}}]
\end{aligned}$$

In den letzten beiden Zeilen haben wir verwendet, dass $X_{n+k} - X_k$ unabhängig ist von X_k und $\{T = k\}$, und dass $X_{n+k} - X_k \sim X_n$ gilt.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[f(X_k) \mathbb{E}^{X_k} g(X_n) \mathbb{1}_{\{T=k\}}] \\
&= \mathbb{E} f(X_T) \mathbb{E}^{X_T} g(X_n).
\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 14.3. Lösung: Es gelte $u(x_0) = 0$. Das ist offensichtlich ein Minimum von u. Weil u harmonisch ist, folgt

$$0 = u(x_0) = \frac{1}{2d} \sum_{|e|=1} u(x_0 + e) \implies 0 = \frac{1}{2d} \sum_{|e|=1} \underbrace{(u(x_0 + e) - u(x_0))}_{\geqslant 0}$$
$$\implies u(x_0 + e) = u(x_0) = 0.$$

Somit ist u in jeder „Umgebung“ $U_x = \{x + e : |e| \leqslant 1\}$ von x konstant Null, und nun können wir $\mathbb{Z}^d$ als Vereinigung solcher Umgebungen schreiben, d.h. u ist überall konstant Null.

Aufgabe 14.4. Lösung: Die Bedinung für Harmonizität lautet

$$u_n(x) = \frac{1}{2d} \sum_{|e|=1} u_n(x + e)$$

und, wenn $\lim_n u_n(y)$ für alle $y \in \mathbb{Z}^d$ existiert, ist diese Beziehung offensichtlich stabil unter punktweisen Limiten. Damit ist die Grenzfunktion u wiederum harmonisch.

Aufgabe 14.5. Lösung: **Bemerkung**. Für die symmetrische einfache Irrfahrt in $\mathbb{Z}^d$ gilt sogar ein schärferes Resultat: Man kann beweisen, dass ohne weitere Annahmen jede harmonische Funktion bereits konstant ist. Vgl. Spitzer [2, Chapter VI, Problem 8]. Diese Lösung ist aber deutlich komplizierter als der halb-beschränkte Fall, der auch schon nicht ganz einfach ist.

Nun zur Lösung der Aufgabe: OE sei $h \geqslant 0$, sonst betrachten wir $h - c$ mit $c := \inf h$. Weiter sei $h > 0$. Wenn nämlich h eine Nullstelle x_0 hätte, also das Minimum annähme, dann folgt sofort (vgl. Aufgabe 14.3)

$$0 = h(x_0) = (2d)^{-1} \sum_{|e|=1} h(x_0 + e) \implies h(x_0 + e) = 0 \implies h \equiv 0.$$

Wir benötigen den Satz von Krein-Milman:

Satz. *Es sei V ein lokal-konvexer topologischer, Hausdorffscher Vektorraum. Jede kompkate konvexe Teilmenge K ist die abgeschlossene konvexe Hülle seiner Extremalpunkte.*

Beweis. Vgl. Rudin [1, Theorem 3.23, S. 75].

Wir nennen $v \in K$ *Extremalpunkt*, wenn er nicht in der Form $tx + (1 - t)y$ mit $x, y \in K$, $x \neq y$ und $t \in (0, 1)$ dargestellt werden kann. Die konvexe Hülle einer Menge M ist die Familie $\{tx + (1 - t)y : x, y \in M, t \in (0, 1)\}$.

Im endlich-dimensionalen ist der Satz von Krein-Milman klar: ein Quader im $\mathbb{R}^3$ hat als Extremalpunkte die 8 Ecken, und diese spannen den gesamten Quader auf.

Nun sei $V = \{$alle harmonische Funktionen auf $\mathbb{Z}^d\}$ und wir statten V mit der punktweisen Konvergenz aus. Weiter sei

$$K = \{h \in V : h \geqslant 0, h(0) = 1\}.$$

Das ist offensichtlich eine abgeschlossene (klar, punktweise Konvergenz erhält ,,harmonisch" und ,,$h(0) = 1$") und kompakte (klar: wenn $\sup_n f_n(x) < \infty$ für alle x gilt, können wir für jedes x eine konvergente Folge $f_{n_{k,x}}(x)$, k, extrahieren, und alles mit einem Diagonalverfahren zu einer punktweise konvergenten Folge zusammenkleben. Das ist ,,poor man's Tychonov theorem": beliebige Produkte kompakter Mengen sind kompakt. Hier haben wir es mit der Menge $\prod_x [-\sup_n f(x), +\sup_n f(x)]$ zu tun) Teilmenge von V.

Wenn wir zeigen können, dass K genau einen Extremalpunkt hat (der konstant ist), dann sind wir fertig. Aufgrund der Harmonizität können wir schreiben

$$h(x) = \frac{1}{2d} \sum_{|e|=1} h(e) \frac{h(x+e)}{h(e)} = \frac{1}{2d} \sum_{|e|=1} h(e) h_e(x).$$

Weil $h_e(x)$ selbst harmonisch ist und weil $1 = h(0) = (2d)^{-1} \sum_{|e|=1} h(e)$ gilt, ist h eine Konvexkombination von Elementen $h_e \in K$. Wenn h extremal ist, dann folgt $h(x) = h_e(x) = h(x+e)/h(e)$ oder $h(x+e) = h(x)h(e)$. Somit ist $h(x) = e^{\langle \alpha, x \rangle}$ für ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{Z}^d$. Weiter gilt

$$h(x) = \sum_{|e|=1} \frac{h(e)}{2d} h_e(x) = \sum_{|e|=1} \frac{h(e)}{2d} e^{\langle \alpha, x \rangle} \overset{\text{Jensen}}{\geqslant} e^{\left\langle \alpha, \sum_{|e|=1} \frac{h(e)}{2d} x \right\rangle} = 1.$$

Damit haben wir, dass harmonisch ist, dass $h \geqslant 1$ ist und dass h sein Minimum annimmt. Nach der Vorbemerkung gilt dann $h \equiv h(0) = 1$.

Nun greift der Satz von Krein-Milman.

Alternative Lösung 1 in $\mathbb{Z}^d$ für $d = 1, 2$: Angenommen, $h \geqslant 0$ ist harmonisch und nicht konstant. Dann existiert ein $x_0 \in \mathbb{Z}^d$ mit $h(x_0) \neq h(0)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, nehmen wir nun an, dass $h(x_0) > h(0)$. Wir definieren eine neue Irrfahrt $V_n = x_0 + S_n$, die von x_0 startet und wir betrachten die Stoppzeit $\tau = \min\{k \geqslant 1 : V_k = x_0\}$. Da V_n in $\mathbb{Z}^d$ mit $d = 1, 2$ rekurrent ist, ist dann $\tau < \infty$ f.s. Die Funktion h ist harmonisch, daher gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}^x h(V_k) = h(x), \quad x \in \mathbb{Z}^d.$$

Daher

$$\begin{aligned}
h(0) &= \mathbb{E} h(V_n) \\
&\geqslant \mathbb{E}\left(h(V_n) \mathbf{1}_{\{\tau \leqslant n\}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left(h(V_n) \mathbf{1}_{\{\tau = k\}}\right) \\
&\overset{\text{SMP}}{=} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\tau = k) \mathbb{E}^{x_0}\left(h(V_{n-k})\right) \\
&= \mathbb{P}(\tau \leqslant n) h(x_0).
\end{aligned}$$

Indem wir n gegen unendlich streben lassen, erhalten wir $h(0) \geqslant h(x_0)$, und das ergibt einen Widerspruch!

Alternative Lösung 2 (wenn wir gleichgradige Integrierbarkeit haben) Wenn $h(X_n)$ gleichgradig integrierbar ist, dann kann man so argumentieren: $h \geqslant 0$ zeigt $\mathbb{E}^x|h(X_n)| = \mathbb{E}^x h(X_n) = \mathbb{E}^x h(X_0) = h(x)$, d.h. der MG-Konvergenzsatz zeigt $h(X_n) \to Z_x$ $\mathbb{P}^x$-f.s. weil aber

$$Z_x(\omega) = \lim_{n\to\infty} h(x + \xi_1(\omega) + \cdots + \xi_n(\omega))$$

ist Z symmetrisch, d.h. nach Hewitt-Savage gilt $Z_x = \mathbb{E}^x Z_x$ f.s.

Weil $h(X_n) \to Z$ auch in L^1 gilt (hier verwenden wir ggi) folgt $\mathbb{E}^x Z_x = \lim_n \mathbb{E}^x h(X_n) = h(x)$ (wenn wir nicht ggi haben, gilt nur „$\leqslant$“!). Insbesondere dann aber $Z_{X_1} = h(x+X_1) = h(x)$ f.s., d.h. $h(x) = h(x+e)$ für alle $|e| = 1$. Damit ist h konstant.

■■

Aufgabe 14.6. Lösung: Die Funktion $u - v$ ist harmonisch und $(u-v)|_{\partial A} = u|_{\partial A} - v|_{\partial A} = 0$. Daher können wir das Maximumprinzip anwenden (Satz 14.8) und erhalten

$$\sup_{\overline{A}}(u-v) = \sup_{\partial A}(u-v) = 0 \implies u(x) - v(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in \overline{A} \implies u(x) \leqslant v(x) \quad \forall x \in \overline{A}.$$

Weil wir u und v vertauschen können, folgt $u = v$ auf $\overline{A}$.

■■

Aufgabe 14.7. Lösung: Indem wir $f = f^+ - f^-$ schreiben, können wir stets $f \geqslant 0$ annehmen. Es seien $x, y \in A$. Wir definieren $\tau := \inf\{n : X_n = y\}$. Weil A zusammenhängend ist, gibt es einen Weg von $x \to y$ und es gilt

$$\mathbb{P}^x(T > \tau) \geqslant \mathbb{P}^x(X_n \text{ geht auf dem kürzesten Weg von } x \text{ nach } y) > 0.$$

Mit der starken Markoveigenschaft erhalten wir daher

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^x f(X_T) &\geqslant \mathbb{E}^x\left(f(X_T)\mathbb{1}_{\{T>\tau\}}\right)\\
&= \mathbb{E}^x\left(\mathbb{E}^{X_\tau}[f(X_T)]\,\mathbb{1}_{\{T>\tau\}}\right)\\
&= \mathbb{E}^x\left(\mathbb{E}^{y}[f(X_T)]\,\mathbb{1}_{\{T>\tau\}}\right)\\
&= \mathbb{P}^x(T>\tau)\mathbb{E}^y[f(X_T)]
\end{aligned}$$

und es folgt, das $\mathbb{E}^x f(X_T)$ und $\mathbb{E}^y f(X_T)$ beide simultan endlich oder unendlich sind.

■■

Aufgabe 14.8. Lösung: **Lemma 14.10*.** *Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine einfache Irrfahrt, $u : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ eine beschränkte **sub**harmonische Funktion auf $A \subset \mathbb{Z}^d$ und $T = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in A^c\}$. Dann ist $M_n := u(X_{n\wedge T})$ ein **sub**Martingal bezüglich $\mathscr{F}_n$ und allen $\mathbb{P}^x$.*

Beweis. Wir wissen aus Lemma 14.9, dass $N_n := u(X_n) - \sum_{i=0}^{n-1} \Delta u(X_i)$ ein MG ist. Daher gilt auf der Menge $\{T > 0\}$ (beachte: $\{T > 0\} \in \mathscr{F}_0$, wir verwenden außerdem optional sampling):

$$0 = \mathbb{E}\big(N_{n\wedge T} - N_{(n-1)\wedge T} \mid \mathscr{F}_{n-1}\big) = \mathbb{E}\big(u(X_{n\wedge T}) - u(X_{(n-1)\wedge T}) - \underbrace{\Delta u(X_{n\wedge T-1})}_{\geqslant 0}\big) \mid \mathscr{F}_{n-1})$$
$$\leqslant \mathbb{E}\big(u(X_{n\wedge T}) - u(X_{(n-1)\wedge T})\big) \mid \mathscr{F}_{n-1}).$$

Auf $T = 0$ haben wir $N_{n\wedge T} = N_0 = u(X_0) = u(X_{n\wedge T})$, d.h. es gilt $u(X_{(n-1)\wedge T}) \leqslant \mathbb{E}\big(u(X_{n\wedge T}) \mid \mathscr{F}_{n-1}\big)$. Daher ist $(u(X_{n\wedge T}), \mathscr{F}_n)_n$ ein sub-MG.

■■

Aufgabe 14.9. Lösung:

(a) Weil P eine endliche Summation bedeutet, können wir P und $\sum_0^\infty$ vertauschen und finden

$$PG = P\left(\sum_{n=0}^\infty P^n\right) = \sum_{n=0}^\infty PP^n = \sum_{n=0}^\infty P^{n+1} = \sum_{m=1}^\infty P^m = G - I$$

wobei wir $P^0 = I$ verwednden. Weiter gilt

$$\Delta G = (P - I)G = PG - G \overset{\text{oben}}{=} G - I - G = -I$$

und weil auch

$$PG = \sum_{n=0}^\infty P^{n+1} = \left(\sum_{n=0}^\infty P^n\right) P = GP$$

gilt, folgt $-I = \Delta G = G\Delta$.

(b) Nach Definition gilt $Pu(x) = \mathbb{E}^x u(X_1)$. Mit der Markov-Eigenschaft sehen wir

$$\mathbb{E}^x u(X_n) = \mathbb{E}^x\left[\mathbb{E}^{X_{n-1}} u(X_1)\right] = \mathbb{E}^x (Pu)(X_{n-1}) = \cdots = P^n u(x).$$

(c) Weil $u = Gf$, $f \geqslant 0 \implies u = Gf \geqslant 0$, und wir haben mit der Konvention, dass für beliebige messbare Funktionen g auf der Menge $\{\tau = \infty\}$ gilt $g(X_\tau) = 0$,

$$\begin{aligned}
u(x) = Gf(x) &= \mathbb{E}^x\left[\sum_{n=0}^\infty f(X_n)\right] \\
&= \mathbb{E}^x\left[\sum_{n=0}^\infty f(X_n)\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\right] \\
&= \mathbb{E}^x\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} f(X_n)\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} + \sum_{n=\tau}^\infty f(X_n)\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\right] \\
&= \mathbb{E}^x\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} f(X_n)\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\right] + \mathbb{E}^x\left[\mathbb{E}^{X_\tau}\left(\sum_{i=0}^\infty f(X_i)\right)\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\right] \\
&= \mathbb{E}^x\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} f(X_n)\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\right] + \mathbb{E}^x\left[Gf(X_\tau)\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\right] \\
&= \mathbb{E}^x\left[\sum_{n=0}^{\tau-1} f(X_n)\right] + \mathbb{E}^x\left[Gf(X_\tau)\right].
\end{aligned}$$

(d) Interpretation 1: Wenn wir unter dem Träger von Gv die Menge $\operatorname{supp} Gv = \{Gv > 0\}$ verstehen, ist die Aufgabe trivial: Weil $Gu(x) \geqslant 0$, $Gv(x) \geqslant 0$ für alle x gilt, folgt aus $Gu \geqslant Gv$ auf $\{Gv > 0\}$ trivialerweise $Gu \geqslant Gv$.

Interpretation 2: In der Potentialtheorie versteht man unter dem Träger von Gv oft die Menge $B = \{v > 0\}$. Dann gilt auch $Gu \geqslant Gv$ auf $\{v > 0\}$, dann schon $Gu \geqslant Gv$ überall.

Wir verwenden Teilaufgabe (c) mit $u \rightsquigarrow Gu$, $f \rightsquigarrow u$ und $B = \{v > 0\} = \operatorname{supp} Gv$. Aus (c) wissen wir für alle x

$$\begin{aligned}
Gu(x) &= \mathbb{E}^x Gu(X_\tau) + \mathbb{E}^x \sum_{n=0}^{\tau-1} u(X_n) \\
&\overset{X_\tau \in B}{\geqslant} \mathbb{E}^x Gv(X_\tau) + \mathbb{E}^x \sum_{n=0}^{\tau-1} u(X_n) \\
&\underset{\text{wenn } n<\tau}{\overset{u \geqslant v = 0}{\geqslant}} \mathbb{E}^x Gv(X_\tau) \\
&\underset{\text{wenn } n<\tau}{\overset{u \geqslant v = 0}{=}} \mathbb{E}^x Gv(X_\tau) + \mathbb{E}^x \sum_{n=0}^{\tau-1} v(X_n) \\
&= Gv(x)
\end{aligned}$$

(e) In dieser Aufgabe müssen wir sorgfältig zwischen den Stoppzeiten

$$\tau := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in B\} \quad \text{und} \quad \tau^+ := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \in B\}$$

unterscheiden. τ heißt erste Eintrittszeit, τ^+ erste Rückkehrzeit. Beachte, dass $\tau = 0$ wenn $X_0 \in B$, dass das aber für τ^+ nicht gelten muß. Andererseits haben wir $\tau = \tau^+$ auf der Menge $\{\tau > 0\}$. Die SMP zeigt daher

$$\mathbb{E}^x \Phi(X_{\tau^+}) = \mathbb{E}^x \mathbb{E}^{X_1} \Phi(f(X_\tau)).$$

Wir schreiben $P_B f(x) := \mathbb{E}^x f(X_\tau)$. Wir müssen $P_B G f = G\psi$ für ein $\psi \geqslant 0$ zeigen. Weil

$$G(I - P) = (I - P)G = I$$

gilt, ist

$$\psi = (I - P)G\psi = (I - P)P_B G f$$

ein guter Kandidat. Wir können ψ folgendermaßen ausrechnen

$$\begin{aligned}
\psi(x) = P_B G f(x) - P P_B G f(x) &= \mathbb{E}^x G f(X_\tau) - \mathbb{E}^x \mathbb{E}^{X_1} G f(X_\tau) \\
&= \mathbb{E}^x G f(X_\tau) - \mathbb{E}^x G f(X_{\tau^+}).
\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichheit wird sofort klar, dass $\psi(x) = 0$, wenn $x \notin B$: wir haben nämlich $\mathbb{P}^x(\tau > 0) = \mathbb{P}^x(\tau = \tau^+) = 1$.

Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned} PP_BGf(x) &= P\mathbb{E}^x Gf(X_\tau) \\ &= \mathbb{E}^x \mathbb{E}^{X_1} \sum_{n=0}^{\infty} P^n f(X_\tau) \\ &= \mathbb{E}^x \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}^{X_1} P^n f(X_\tau) \\ &= \mathbb{E}^x \sum_{n=0}^{\infty} P^{n+1} f(X_\tau) \\ &= \mathbb{E}^x \sum_{n=1}^{\infty} P^n f(X_\tau) \leqslant P_BGf(x) \end{aligned}$$

also ist $\psi = P_BGf - PP_BGf \geqslant 0$, und wir erhalten, dass $P_BGf = G\psi$ ein Potential ist.

(ii) Wenn $x \in B$, dann gilt $\tau = 0$, d.h. $u(x) := \mathbb{E}^x Gf(X_\tau) = \mathbb{E}^x Gf(X_0) = Gf(x)$.

(iii) Wir verwenden Teilaufgabe (c) mit $u = Gf$

$$u(x) = \mathbb{E}^x\left[(Gf)(X_\tau)\right] = Gf(x) - \underbrace{\mathbb{E}^x \sum_{i=0}^{\tau-1} f(X_i)}_{\geqslant 0 \text{ weil } f \geqslant 0} \leqslant Gf(x).$$

(iv) Ist offensichtlich von Teil (i).

Die Eindeutigkeit folgt nun aus dem Maximumprinzip, das wir auf eine Funktion w mit den Eigenschaften (i)–(iv) anwenden. Wir schreiben $u(x) = G\psi(x) = \mathbb{E}^x Gf(X_\tau)$.

$$\begin{aligned} w|_B = Gf|_B = u|_B &\implies u \leqslant w \quad \text{auf } B \\ &\implies G\psi \leqslant w \quad \text{auf } B \supset \{\psi > 0\} \\ &\overset{\text{(d)}}{\implies} G\psi(x) \leqslant w(x) \quad \text{für alle } x. \end{aligned}$$

Wir haben also $u \leqslant w$ gezeigt, d.h. u ist, bezüglich der Eigenschaften (i)–(iv), minimal (und damit eindeutig).

(f) Setze $f = u - Pu$. Damit

$$Gf = G(u - Pu) = \lim_n \sum_{i=0}^{n} (P^i u - P^{i+1} u) = \lim_n (u - P^{n+1} u) = u - \lim_n P^{n+1} u.$$

Dieser Grenzwert existiert offensichtlich (wegen $Pu \leqslant u$ ist das ein Infimum/absteigender limes), also gilt $Gf = u - h$, wobei $h = \lim_m P^m u$. Weil $Pu \leqslant u$ gilt auch $f = u - Pu \geqslant 0$. Schließlich haben wir

$$Ph = P \lim_n P^n h = \lim_n P^{n+1} h = h \implies h \quad \text{harmonisch.}$$

Wenn $u = Gf + h = Gf' + h'$ ist, wobei $f', h' \geqslant 0$ und h' harmonisch ist, dann gilt

$$\begin{aligned} G(f - f') = h' - h &\implies PG(f - f') = P(h' - h) = h' - h \\ &\implies G(f - f') - (f - f') = h' - h \\ &\implies f = f' \quad [\text{weil wir } G(f - f') = h' - h \text{ haben!}] \end{aligned}$$

und notwendigerweise auch $h = h'$.

(g) Mit dem Stop'n'go Prinzip sehen wir für $p(x) := \mathbb{P}^x(\tau < \infty)$

$$Pp(x) = \mathbb{E}^x\Big(\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\mathbb{P}^{X_1}(\tau < \infty)\Big) \leqslant \mathbb{E}^x\Big(\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\Big) = p(x).$$

Damit ist p superharmonisch und exzessiv. Wir haben

$$h(x) = \lim_n P^n p(x) = \lim_n \mathbb{E}^x\Big(\mathbb{1}_{\tau<\infty}\mathbb{P}^{X_n}(\tau < \infty)\Big)$$

und das ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir die Menge B nach n gemachten Schritten in endlich vielen weiteren Schritten erreichen. Weil das für alle n gilt ist $h(x)$ die W-Keit, die Menge B **unendlich oft** zu besuchen. Damit ist die Riesz-Zerlegung gegeben durch

$$\mathbb{P}^x(\tau < \infty) = G(p - Pp)(x) + h(x).$$

■■

Aufgabe 14.10. Lösung: Ja, gilt auch in d Dimensionen. Wir zeigen direkt diesen Fall. Wir schreiben $X_n = (X_n^1, \dots, X_n^d)$ und $\xi_n = (\xi_n^1, \dots, \xi_n^d)$ für die Koordinaten. Nach Definition gilt

$$\mathbb{E}\xi_n^i = 0$$

sowie

$$\mathbb{E}[(\xi_n^i)^2] = \mathbb{P}(\xi_n^i = e_i)1^2 + \mathbb{P}(\xi_n^i = -e_i)(-1)^2 + (1 - \mathbb{P}(\xi_n^i \in \{\pm e_i\}))0^2 = \frac{2}{2d} = \frac{1}{d}.$$

Weiter gilt für $i, k \in \{1, \dots, d\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}^i X_{n+1}^k \mid \mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}((X_n^i + \xi_{n+1}^i)(X_n^k + \xi_{n+1}^k) \mid \mathscr{F}_n)\\ &= \mathbb{E}(X_n^i X_n^k + \xi_{n+1}^i X_n^k + \xi_{n+1}^k X_n^i + \xi_{n+1}^i \xi_{n+1}^k) \mid \mathscr{F}_n)\end{aligned}$$

und nun beachten wir, dass X_n^i, X_n^k $\mathscr{F}_n$-mb. sind

$$= X_n^i X_n^k + X_n^k \mathbb{E}(\xi_{n+1}^i \mid \mathscr{F}_n) + X_n^i \mathbb{E}(\xi_{n+1}^k \mid \mathscr{F}_n) + \mathbb{E}(\xi_{n+1}^i \xi_{n+1}^k \mid \mathscr{F}_n)$$

und dass $\xi_{n+1}^i \xi_{n+1}^k = 0$ für $k \neq i$ (weil wir nicht in zwei Richtungen gleichzeitig gehen können!) sowie die Unabhängigkeit von ξ_{n+1}^k von $\mathscr{F}_n$

$$\begin{aligned}&= X_n^i X_n^k + X_n^k \mathbb{E}(\xi_{n+1}^i) + X_n^i \mathbb{E}(\xi_{n+1}^k) + \delta_{ik}\mathbb{E}((\xi_{n+1}^i)^2)\\ &= X_n^i X_n^k + \frac{1}{d}\delta_{ik}.\end{aligned}$$

Wir summieren nun über $i, k = 1, \dots, d$ und erhalten

$$\mathbb{E}(|X_{n+1}|^2 \mid \mathscr{F}_n) = |X_n|^2 + 1 \implies \mathbb{E}(|X_{n+1}|^2 - (n+1) \mid \mathscr{F}_n) = |X_n|^2 - n.$$

■■

Aufgabe 14.11. Lösung: Wir führen alles auf die Situation $a' < 0 < b'$ zurück, indem wir $a' := a - x < 0 < b - x = b'$ setzen und beachten, dass $T = \inf\{n : S_n \notin (a', b')\}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}^x(X_T = a) = \mathbb{P}(X_T + x = a) = \mathbb{P}(X_T = a - x) = \mathbb{P}(X_T = a') = \frac{b'}{b' - a'} = \frac{b - x}{b - a}.$$

■■

Aufgabe 14.12. Lösung: Für jedes $x \in A$ gilt

$$u(x) = \sum_{|e|=1} \frac{1}{2d} u(x + e), \quad x \in A,$$

wobei die Unbekannten gerade die Terme $(u(x))_{x \in A}$ sind. Beachte: $u(x + e) = f(x + e)$ wenn $x + e \in \partial A$.

■■

Aufgabe 14.13. Lösung: Wir müssen eigentlich nur den Beweis von Satz 14.12 leicht abändern.

Nachweis der Lösungseigenschaft: Wir definieren $w(x)$ wie angegeben.

(a) Für $b \in \partial A$ gilt $\mathbb{P}^b(T = 0) = 1$, also $w(b) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}^b f(X_0) \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} = \mathbb{E}^b f(X_0) = f(b)$.

(b) Für $a \in A$ gilt $\mathbb{P}^a(T \geqslant 1) = 1$ und wir betrachten $X'_n := X_{n+1} - X_1 \sim X_n$ und $T' := \inf\{n : X'_n \in A^c\}$. Weil $T = \infty \iff T' = \infty$, gilt

$$w(a) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}^a[f(X_T) \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}] = \mathbb{E}^a[f(\underbrace{X'_{T'} + X_1}_{\text{unabh.}}) \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}] = \mathbb{E}^a \mathbb{E}^{X_1}[f(X'_{T'} \mathbb{1}_{\{T'<\infty\}}])$$

$$\stackrel{X \sim X'}{=} \mathbb{E}^a \mathbb{E}^{X_1}[f(X_T) \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}] = \mathbb{E}^a w(X_1)$$

und es folgt $\Delta w(a) = \mathbb{E}^a w(X_1) - w(a) = 0$.

Minimalität der Lösung: Angenommen $u \geqslant 0$ ist eine weitere Lösung des Problems. Dann ist wg. Lemma 14.10 $M_n := u(X_{n \wedge T})$ ein beschränktes Martingal.

Optional stopping (Satz 4.4) und das Lemma von Fatou ergeben

$$u(x) = \mathbb{E}^x M_0 \stackrel{4.4}{=} \mathbb{E}^x M_{n \wedge T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}^x[u(X_{n \wedge T}) \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}].$$

Wir können nun Fatou anwenden

$$\begin{aligned} u(x) &= \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}^x[u(X_{n \wedge T}) \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}] \geqslant \mathbb{E}^x[\liminf_{n\to\infty} u(X_{n \wedge T}) \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}] \\ &= \mathbb{E}^x[u(X_T) \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}] = \mathbb{E}^x[f(X_T) \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}]. \end{aligned}$$

■■

Aufgabe 14.14. Lösung: Gemäß Korollar 14.16 hat u die Gestalt

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{E}^x[u(X_T) \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}] + c\,\mathbb{P}^x(T = \infty) \\ &= \mathbb{E}^x[u(0) \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}] + c\,\mathbb{P}^x(T = \infty) \\ &= u(0) \mathbb{P}^x(T < \infty) + c\,\mathbb{P}^x(T = \infty). \end{aligned}$$

Fall 1: $d = 1, 2$. Dann gilt $\mathbb{P}^x(T < \infty) = 1$ (da rekurrent). Mithin $u(x) \equiv u(0)$.

Fall 2: $d \geqslant 3$. Dann gilt $\mathbb{P}^x(T = \infty) > 0$ (da transient). Wenn wir $x = 0$ wählen, folgt

$$u(0) = u(0)\mathbb{P}^0(T < \infty) + c\,\mathbb{P}^0(T = \infty) \implies c = u(0)$$

und die Behauptung folgt.

Aufgabe 14.15. Lösung: Geht wie Lemma 14.11: die Annahme garantiert, dass es $m \in \mathbb{N}, \rho \in (0,1)$ gibt mit $\mathbb{P}^x(T \leqslant m) > \rho$ und daher $\mathbb{P}^x(T > km) \leqslant (1-\rho)^k$.

Aufgabe 14.16. Lösung: Wir ändern Schritt 2° folgendermaßen ab: Für $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^x(X_n \in B) - \mathbb{P}^y(X_n \in B)\\
&\quad= \mathbb{P}^{x,y}\big(Z_n \in B \times \mathbb{R}^d\big) - \mathbb{P}^{x,y}\big(Z_n \in \mathbb{R}^d \times B\big)\\
&\quad= \mathbb{P}^{x,y}\big(Z_n \in B \times \mathbb{R}^d,\ \tau > n\big) - \mathbb{P}^{x,y}\big(Z_n \in \mathbb{R}^d \times B,\ \tau > n\big)\\
&\qquad+ \mathbb{P}^{x,y}\big(Z_n \in B \times \mathbb{R}^d,\ \tau \leqslant n\big) - \mathbb{P}^{x,y}\big(Z_n \in \mathbb{R}^d \times B,\ \tau \leqslant n\big)\\
&\quad\overset{1^{\circ}}{=} \mathbb{P}^{x,y}\big(Z_n \in B \times \mathbb{R}^d,\ \tau > n\big) - \mathbb{P}^{x,y}\big(Z_n \in \mathbb{R}^d \times B,\ \tau > n\big)\\
&\quad\leqslant \mathbb{P}^{x,y}(\tau > n).
\end{aligned}$$

Diese Rechnung gilt auch für den Betrag der linken Seite: vertausche die Rollen von x und y und beachte, dass $\mathbb{P}^{x,y}(\tau > n) = \mathbb{P}^{y,x}(\tau > n)$. Wir müssen nur noch das Supremum über alle $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ bilden.

Aufgabe 14.17. Lösung: $\boxed{\text{Fehler in der Angabe: } \mathbb{E}^0 T_1^\alpha < \infty \text{ für } \alpha < \tfrac12 \text{ und } = +\infty \text{ für } \alpha \geqslant \tfrac12}$

$\boxed{\text{Fehler in der Angabe: } \mathbb{P}^x(\tau > n) \leqslant cn^{\epsilon - 1/2} \text{ für } \epsilon > 0}$

Im folgenden schreiben wir stets $T := T_1$. Wir müssen zwischen zwei Fällen unterscheiden: $p \geqslant q$ und $p < q$. Das ist auch klar, wenn man den Extremfall $p = 0 < q$ betrachtet: in diesem Fall kann 1 niemals erreicht werden. Wir werden weiter unten sehen, an welchem technischen Detail diese Fallunterscheidung hängt.

Allgemeine Rechnungen: Wir haben

$$f(\theta) := \mathbb{E}e^{\theta\xi_1} = pe^\theta + qe^{-\theta} + r, \quad \theta \geqslant 0$$

und es gilt, dass $M_n := e^{\theta X_n}/f^n(\theta)$ ein Martingal ist. Offensichtlich haben wir

$$f'(\theta) = pe^\theta - qe^{-\theta}$$

und es folgt $f'(\theta) \geqslant 0$ wenn $p \geqslant q$, d.h. f ist in diesem Fall monoton wachsend und insbesondere $f(\theta) \geqslant 1$.

Für $p < q$ hat $f(\theta)$ ein Minimum an der Stelle $\log\sqrt{q/p} > 0$ und $f < 1$ wenn $\theta \in (0, \epsilon)$ hinreichend klein aber $\neq 0$ ist.

Fall $p \geqslant q$**.** Wir können hier wie in Beispiel 4.6 und Beispiel 11.10 argumentieren:

- $0 \leqslant \dfrac{e^{\theta X_{n\wedge T}}}{f(\theta)^{n\wedge T}} \leqslant e^{\theta}$ für alle $\theta \geqslant 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{\theta X_{n\wedge T}}}{f(\theta)^{n\wedge T}} = \dfrac{e^{\theta}}{f(\theta)^{T}} \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ für alle $\theta \geqslant 0$
- Wir wenden nun optional sampling auf das MG M_n an und beachten, dass ein MG konstanten Erwartungswert hat.

$$\begin{aligned} 1 = \mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}M_{0\wedge T} &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}M_{n\wedge T} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\frac{e^{\theta X_{n\wedge T}}}{f(\theta)^{n\wedge T}} \\ &\overset{\text{dom. Konv.}}{=} \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\theta X_{n\wedge T}}}{f(\theta)^{n\wedge T}}\right] = e^{\theta}\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}}{f(\theta)^{n\wedge T}}\right] \xrightarrow[\theta\downarrow 0]{\text{monotone Konv.}} \mathbb{P}(T<\infty). \end{aligned}$$

- Wenn wir $T < \infty$ f.s. wieder in die bisherigen Rechnungen einsetzen, folgt

$$\mathbb{E}\left[f(\theta)^{-T}\right] = \mathbb{E}\left[(pe^{\theta} + qe^{-\theta} + r)^{-T}\right] = e^{-\theta}. \tag{*}$$

Wir können die Formel (*) auf beiden Seiten in θ differenzieren und dann $\theta = 1$ einsetzen. Es folgt mit dem Differentiationslemma—beachte, dass $T(1+\epsilon)^{-T} \leqslant c(n,\epsilon)$ wenn $T \geqslant n$:

$$\mathbb{E}\left[T(pe^{\theta} - qe^{-\theta})(pe^{\theta} + qe^{-\theta} + r)^{-T-1}\right] = -e^{-\theta}$$

Für $\theta = 1$ folgt $\mathbb{E}T(p-q) = 1$ und somit $\mathbb{E}T = (p-q)^{-1}$. Für $p > q$ ist die eben gemachte Rechnung rigoros, für $p = q$ folgt $\mathbb{E}T = \infty$, wie wir weiter unten sehen werden.

Fall $p = q$**.** Wir wollen mit Hilfe von (*) die Laplace-Transformation von T finden. Dazu setzen wir

$$e^u = 2p(e^{\theta} + e^{-\theta}) + 1 - 2p = 2p(\cosh\theta - 1) + 1 \implies \frac{e^u - 1}{p} + 2 = e^{\theta} + e^{-\theta} =: \frac{1}{s} + s.$$

Wir lösen nach $s = e^{-\theta}$ auf und erhalten

$$\begin{aligned} s &= \frac{\frac{e^u-1}{p} + 2 - \sqrt{\left(\frac{e^u-1}{p}+2\right)^2 - 4}}{2} \\ &= \frac{e^u - 1}{2p} + 1 - \sqrt{\left(\frac{e^u-1}{2p} + 1\right)^2 - 1} \\ &= \frac{e^u - 1}{2p} + 1 - \sqrt{\left(\frac{e^u-1}{p}\right)\left(\frac{e^u-1}{4p} + 1\right)} \end{aligned}$$

und somit

$$1 - \mathbb{E}e^{-u(T+1)} = \left(1 - \frac{1}{2p}\right)(1 - e^{-u}) + \sqrt{\left(\frac{1-e^{-u}}{p}\right)\left(\frac{1-e^{-u}}{4p} + 1\right)}.$$

Aus Beispiel 11.10 wissen wir, dass die Asymptotik von $1 - \mathbb{E}e^{-u(T+1)}$ für $u \to 0$ für die Konvergenz von $\mathbb{E}T^\alpha$ wesentlich ist. Es gilt für $0 < u \ll 1$

$$1 - \mathbb{E}e^{-u(T+1)} \approx \left(1 - \frac{1}{2p}\right)u + \sqrt{\frac{u}{p}\left(\frac{u}{4p} + 1\right)} \approx \left(1 - \frac{1}{2p}\right)u + \sqrt{\frac{u}{p}} \approx \sqrt{\frac{u}{p}}.$$

Damit sehen wir wie im Beispiel, dass $\mathbb{E}T_1^\alpha < \infty$ für $\alpha < \frac{1}{2}$ gilt und dass $\mathbb{E}T_1^\alpha = \infty$ für $a \geqslant \frac{1}{2}$ gilt.

Schließlich wenden wir uns der Coupling-Abschätzung zu: Wir haben $\tau = T_1$ und

$$\mathbb{P}^x(T_1 > n) = \mathbb{P}^x(T_1^\alpha > n^\alpha) \leqslant n^{-\alpha}\mathbb{E}T_1^\alpha, \quad \forall \alpha < \frac{1}{2}.$$

Beachte, dass T_1 tatsächlich die Kopplungszeit ist – siehe die Bemerkung am Ende von Beispiel 14.21.e und die Konstruktion der iterativen Kopplungen im Beweis von Lemma 14.23, für die man maximal d iid Kopien von T_1 erhält.

Fall $p < q$: Hier argumentieren wir wie im Beispiel 11.9. Wegen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{X_n} \middle| \mathscr{F}_{n-1}\right] &= \left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n-1}} \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_1} \middle| \mathscr{F}_{n-1}\right] \\
&\overset{\xi_1 \sim \xi_n \perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_{n-1}}{=} \left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n-1}} \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_n} \middle| \mathscr{F}_{n-1}\right] = \left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n-1}} \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_1}\right].
\end{aligned}$$

Weil

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_1}\right] = \frac{q}{p}p + \frac{p}{q} \cdot q + r = q + p + r = 1$$

können wir Beispiel 11.9 **wörtlich** folgen und erhalten $\mathbb{P}(T_1 < \infty) = \frac{p}{q}$ und $\mathbb{P}(T_1 = \infty) = 1 - \frac{p}{q}$. Insbesondere gilt $\mathbb{E}T_1^\alpha = \infty$ für alle $\alpha > 0$.

Partielle alternative Lösung: Setze $f_n := \mathbb{P}^n(T_1 < \infty)$ – das ist die W-keit 1 zu erreichen, wenn $X_0 = n \in \mathbb{Z}$ gilt. Offenbar gilt

$$f_1 = 1 \quad \text{und} \quad f_0 = p + rf_0 + qf_{-1} = p + rf_0 + qf_0^2 \tag{**}$$

weil nämlich mit der starken ME gilt

$$\begin{aligned}
f_{-1} &= \mathbb{P}^{-1}(T_0 \leqslant T_1, T_1 < \infty) \\
&= \mathbb{E}^{-1}\left[\mathbb{1}_{T_0<\infty}\mathbb{P}^{X_{T_0}}(T_1 < \infty)\right] \\
&= \mathbb{E}^{-1}\left[\mathbb{1}_{T_0<\infty}\mathbb{P}^0(T_1 < \infty)\right] \\
&= \mathbb{E}^{-1}\left[\mathbb{1}_{T_0<\infty}\right]\mathbb{P}^0(T_1 < \infty) \\
&= f_0^2.
\end{aligned}$$

Die quadratische Gleichung (**) hat zwei Lösungen: $f_0 = 1$ und $f_0 = p/q$, wobei wir die erste Lösung im Fall $p \geqslant q$ wählen (müssen) und $f_0 = p/q$ im Fall $p < q$ wählen müssen (sieht man, wenn wir z.B. den Extremfall $p = 0$ betrachten, für den $f_0 = 0$ sein muß.

■■

15 Donskers Invarianzprinzip und die Brownsche Bewegung

Aufgabe 15.1. Lösung: Der Approximationssatz von Weierstraß (z.B. [Schilling-WT, Satz 8.6]) besagt, dass die Polynome gleichmäßig dicht im Raumf $C = C[0,1]$ sind. Wenn $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ein Polynom vom Grad n ist, können wir rationale Zahlen $q_0, \dots, q_n$ bestimmen, so dass

$$\sum_{i=0}^n |a_i - q_i| \leqslant \epsilon \implies \sup_{x\in[0,1]} \left| p(x) - \sum_{i=0}^n q_i x^i \right| \leqslant \sum_{i=0}^n |(a_i - q_i)x^n| \leqslant \sum_{i=0}^n |a_i - q_i| \leqslant \epsilon.$$

Also sind auch die Polynome mit rationalen Koeffizienten gleichmäßig dicht in C.

Damit ist der Beweis, dass die Kugeln $\mathbb{B}(p,\delta)$ (p aus einer dichten Teilmenge von C, $\delta > 0$ rational) bzw. $\overline{\mathbb{B}}(p,\delta)$ identisch mit dem Beweis, dass die Euklidischen Kugeln $B_r(q) \subset \mathbb{R}^d$, $q \in \mathbb{Q}^d$, $r \in \mathbb{Q}^+$ (bzw. $\overline{B_r(q)}$) die Borel-Mengen erzeugen. Vgl. hierzu [Schilling-MI, Aufgabe 2.5].

■■

Bibliography

[Schilling-MI] R. L. Schilling: *Maß und Integral. Eine Einführung für Bachelor-Studenten.* De Gruyter, Berlin 2014.

[Schilling-WT] R. L. Schilling: *Wahrscheinlichkeit. Eine Einführung für Bachelor-Studenten.* De Gruyter, Berlin 2017.

[Schilling-MIMS] R. L. Schilling: *Measures, Integrals and Martingales.* Cambridge University Press, Cambridge 2017 (2. Aufl.).

[Schilling-WT] R. L. Schilling: *Martingale und Prozesse. Eine Einführung für Bachelor-Studenten.* De Gruyter, Berlin 2018.

[1] W. Rudin: *Functional Analysis.* Mc-Graw Hill, New York 1991 (2. Aufl.).

[2] F. Spitzer: *Principles of Random Walk.* D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton 1964.