

Inhalt

Vorwort — v

Mathematische Grundlagen — vi

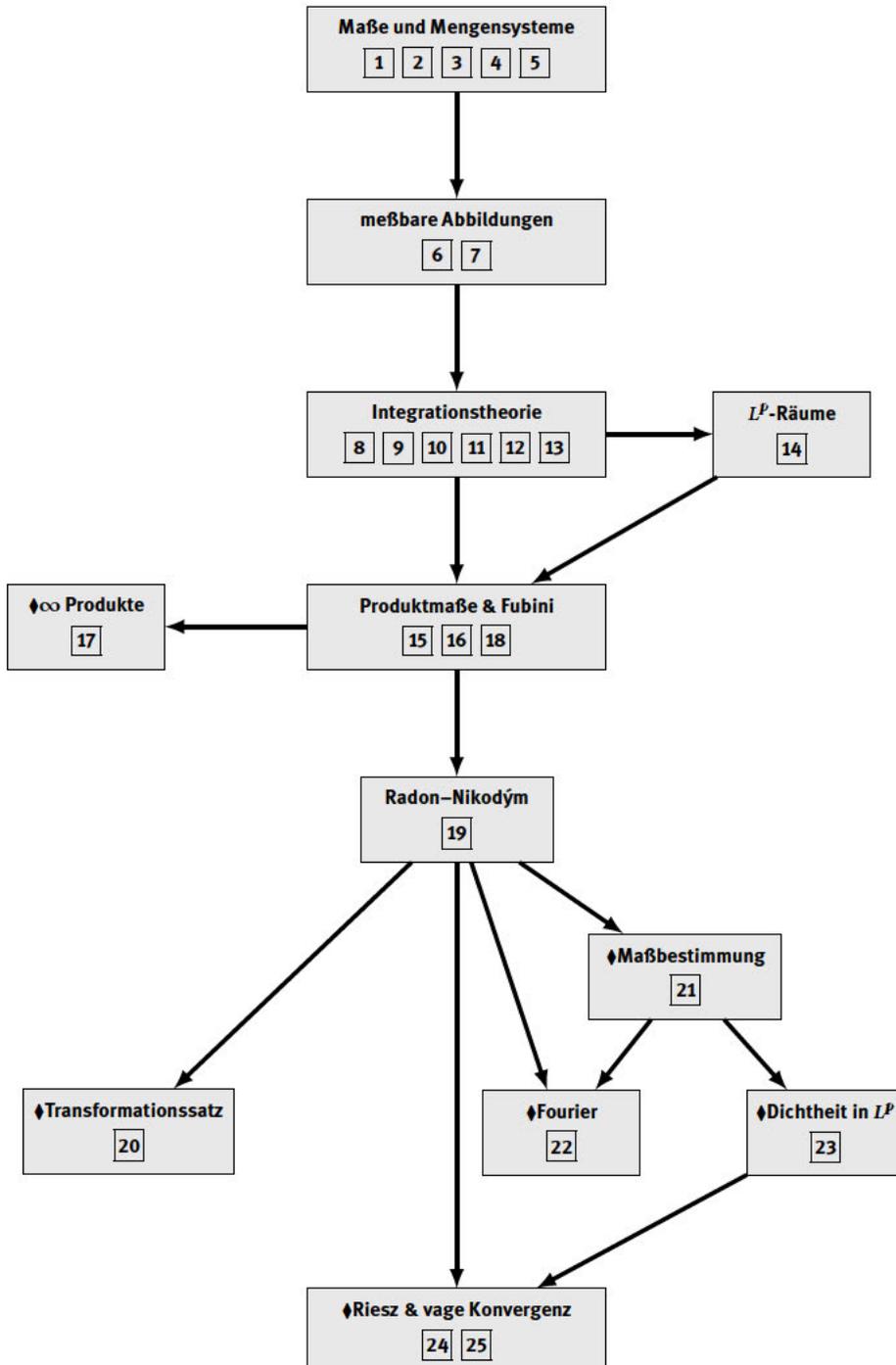
Abhängigkeit der einzelnen Kapitel — vii

Bezeichnungen — viii

- 1 Einleitung — 1
- 2 Sigma-Algebren — 4
- 3 Maße — 9
- 4 Eindeutigkeit von Maßen — 14
- 5 Existenz von Maßen — 20
- 6 Messbare Abbildungen — 28
- 7 Messbare Funktionen — 33
- 8 Das Integral positiver Funktionen — 40
- 9 Das Integral messbarer Funktionen — 47
- 10 Nullmengen — 52
- 11 Konvergenzsätze — 55
- 12 Parameter-Integrale — 59
- 13 Riemann vs. Lebesgue — 63
- 14 Die Räume \mathcal{L}^p und L^p — 67
- 15 Produktmaße — 76
- 16 Der Satz von Fubini–Tonelli — 81

17	♦Unendliche Produkte — 89
18	Bildintegrale und Faltung — 93
19	Der Satz von Radon–Nikodým — 99
20	♦Der allgemeine Transformationssatz — 104
21	♦Maßbestimmende Familien — 116
22	♦Die Fouriertransformation — 120
23	♦Dichte Teilmengen in L^p ($1 \leq p < \infty$) — 134
24	♦Die Rieszischen Darstellungssätze — 140
25	♦Konvergenz von Maßen — 151
A	Anhang — 159
A.1	Konstruktion einer nicht-messbaren Menge — 159
A.2	Berechnung des Spatvolumens — 160
A.3	Messbarkeit der Stetigkeitsstellen beliebiger Funktionen — 161
A.4	Das Integral komplexwertiger Funktionen — 162
A.5	Regularität von Maßen — 163
A.6	Separabilität des Raums $C_c(E)$ — 167
	Literatur — 168
	Stichwortverzeichnis — 169

Abhängigkeit der einzelnen Kapitel



Bezeichnungen

Bezeichnungen, die nur lokal oder in einem Kapitel auftreten, sind nicht aufgeführt; alle Zahlenangaben beziehen sich auf Seitennummern. Binäre Operationen $f \pm g, f \cdot g, f \wedge g, f \vee g$, Vergleiche $f \leq g, f < g$ und Grenzwerte $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f, \lim_n f_n, \liminf_n f_n, \limsup_n f_n, \sup_n f_n$ oder $\inf_n f_n$ von Funktionen sind stets punktweise gemeint, d. h. für jedes x .

Allgemeines & Konventionen

positiv	stets im Sinne ≥ 0
negativ	stets im Sinne ≤ 0
\mathbb{N}	$1, 2, 3, \dots$
$\inf \emptyset$	$\inf \emptyset = +\infty$
$a \vee b$	Maximum von a und b
$a \wedge b$	Minimum von a und b
$ x $	Euklidische Norm in \mathbb{R}^d , $ x ^2 = x_1^2 + \dots + x_d^2$
$\langle x, y \rangle$	Skalarprodukt $\sum_{i=1}^d x_i y_i$
$GL(d, \mathbb{R})$	invertierbare Matrizen $\in \mathbb{R}^{d \times d}$
$O(d)$ ($SO(d)$)	(spezielle) orthogonale Matrizen $\in \mathbb{R}^{d \times d}$

Mengen

$\#$	Kardinalität
\subset	Teilmenge (inkl. „=“)
\cup	Vereinigung paarweise disjunkter Mengen
A^c	Komplement der Menge A
\bar{A}	Abschluss der Menge A
$B_r(x)$	offene Kugel um x , Radius r
$A_n \uparrow A$	$A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$ & $A = \bigcup_n A_n$
$B_n \downarrow B$	$B_n \supset B_{n+1} \supset \dots$ & $B = \bigcap_n B_n$
\mathcal{A}	generische σ -Algebra
$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$	$\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ „Rechtecke“
$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$	Produkt- σ -Algebra, 77
$\mathcal{B}(E)$	Borelmengen in E , 6
$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$	Borelmengen in $\bar{\mathbb{R}}$, 34
$\mathcal{C}, \mathcal{C}(E)$	abgeschlossene Mengen
$\mathcal{I}, \mathcal{I}^o, \mathcal{I}_{\text{rat}}$	„Rechtecke“ im \mathbb{R}^d , 6
$\mathcal{K}, \mathcal{K}(E)$	kompakte Mengen
$\mathcal{O}, \mathcal{O}(E)$	offene Mengen
$\mathcal{P}(E)$	Potenzmenge von E

Maße & Funktionen

μ, ν	generische Maße
δ_x	Dirac-Maß in x , 11
λ, λ^d	Lebesgue-Maß (in \mathbb{R}^d), 12

$\mu \otimes \nu$

$\mathbb{1}_A$
u^+
u^-
$\{u \in B\}$,
$\{u \geq a\}$
$\text{supp } u$
$C(E)$
$C_b(E)$
$C_\infty(E)$
$C_c(E)$
$\mathcal{E}, \mathcal{E}(\mathcal{A})$
$\mathcal{M}, \mathcal{M}(\mathcal{A})$
$\mathcal{M}_{\bar{\mathbb{R}}}, \mathcal{M}_{\bar{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$
$\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^1(\mu)$
$\mathcal{L}_{\bar{\mathbb{R}}}^1, \mathcal{L}_{\bar{\mathbb{R}}}^1(\mu)$
$\mathcal{L}^p, \mathcal{L}^\infty$
L^p, L^∞
$\ u\ _{L^p}$
$\ u\ _{L^\infty}$
$\ u\ _\infty$

Produkt von Maßen, 80, 89

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Positivteil: $u \vee 0$, 36

Negativteil: $-(u \wedge 0)$, 36

$\{x : u(x) \in B\}$,

$\{x : u(x) \geq a\}$ usw.

Träger $\{u \neq 0\}$

stetige Funktionen auf E

beschränkte — —

— — mit $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$

— — mit kompaktem Träger

einfache Funktionen, 35

messbare Funktionen, 34

— —, $\bar{\mathbb{R}}$ -wertig, 34

integrierbare Funktionen, 47

— —, $\bar{\mathbb{R}}$ -wertig, 47

67

69

$$\left(\int |u|^p d\mu \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$$

$$\inf \{c > 0 : \mu\{|u| \geq c\} = 0\}$$

$$\sup_x |u(x)|$$

Definitionen

(Σ_1) – (Σ_3)	σ -Algebra, 4
(\mathcal{O}_1) – (\mathcal{O}_3)	Topologie, 6
(M_0) – (M_2)	Maß, 9
(D_1) – (D_3)	Dynkin-System, 14
(S_1) – (S_3)	Halbring, 20
(OM_1) – (OM_3)	äußeres Maß, 21

Abkürzungen

BL	Beppo Levi
f. ü.	fast überall
mb.	messbar
o. E.	ohne Einschränkung(en)
\cap/\cup -stabil	Familie enthält endliche Schnitte/Vereinigungen
\int	selbst rechnen!