


Vorwort

Die vorliegende Einführung in die Maß- und Integrationstheorie richtet sich an Studierende der Mathematik und Physik ab dem zweiten Studienjahr. Mein Ziel ist es, in kompakter und eingänglicher Form die wesentlichen Ergebnisse der Lebesgueschen Maß- und Integrationstheorie darzustellen, die eine wichtige Grundlage für die höhere Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie oder mathematische Physik ist.

Der Text folgt meinen Vorlesungen an der TU Dresden, er kann als Begleittext für eine Vorlesung aber auch zum Selbststudium verwendet werden. Als Fortsetzung werden in gleicher Ausstattung die Bände *Wahrscheinlichkeit* und *Martingale & Prozesse* erscheinen.


Die Maßtheorie ist kein Selbstzweck, sondern ein Hilfsmittel für weiterführende Vorlesungen. Daher verzichte ich auf einen allzu systematischen Aufbau, der oft den Charakter des „Lernens auf Vorrat“ mit sich bringt, und konzentriere mich gleich auf die zentralen Begriffe. Um schnell relevante Beispiele zu haben, wird das Lebesgue-Maß schon in den ersten Kapiteln eingeführt und untersucht, die Existenz und Eindeutigkeit in \mathbb{R} und \mathbb{R}^d wird dann schrittweise im Laufe der Vorlesung nachgewiesen. Bei der Auswahl des Stoffs habe ich mich von der Frage „Was wird später im Studium und in den Anwendungen wirklich gebraucht?“ leiten lassen. Die Auswahl ist natürlich subjektiv, aber ich hoffe, eine vernünftige Balance zwischen einer knappen Einführung und einer gründlichen Darstellung gefunden zu haben.

Für das tiefere Verständnis ist es wichtig, dass der Leser sich mit der Materie selbständig auseinandersetzt. Zum einen sind dafür die Übungsaufgaben gedacht (vollständige Lösungen gibt es unter www.motapa.de/mint), andererseits weise ich im laufenden Text mit dem Symbol  auf (bisweilen nicht ganz so offensichtliche) Lücken hin, die der Leser selbst ausfüllen sollte. Auf

-
- ▶ wichtige Schreibweisen,
 - ▶ Gegenbeispiele,
 - ▶ typische Fallen und versteckte Schwierigkeiten
-



wird durch derart markierte Absätze aufmerksam gemacht.

Vom Umfang entsprechen die Kapitel 1–19 einer dreistündigen Vorlesung, etwa 4–5 Textseiten können in einer Vorlesungs-Doppelstunde durchgenommen werden. Die mit dem Symbol  gekennzeichneten Kapitel sind als Ergänzung gedacht und können je nach Zeit und Zielsetzung ausgewählt werden. Sie sind auch als Themen für ein Proseminar geeignet. Eine Übersicht über die Abhängigkeit der einzelnen Kapitel findet sich auf Seite vii.

An diesem Manuskript haben direkt und indirekt viele Studenten, Kollegen und Freunde mitgewirkt. Mein Dank gilt vor allem Julian Hollender, der mir bei den Aufgaben geholfen und die Abbildungen erstellt hat, Franziska Kühn, die das gesamte

Manuskript durchgearbeitet hat, sowie Dr. Anita Behme, Dr. Georg Berschneider, Vera Schade und Michael Schwarzenberger für die kritische Durchsicht des Texts. Die Zusammenarbeit mit den Lektoren des Verlags de Gruyter, Frau Dittberner, Frau Hutt und Herrn Lindenhain, war sehr angenehm und hat wesentlich zur Entstehung dieses Buchs beigetragen. Meiner Frau danke ich für das große Verständnis, das sie immer wieder für meine Arbeit aufbringt.

Dresden, Februar 2015

René L. Schilling

Mathematische Grundlagen

Voraussetzung für das Studium der Maß- und Integrationstheorie sind Kenntnisse in Analysis und linearer Algebra, wie sie üblicherweise im ersten Studienjahr des Mathematik- oder Physikstudiums vermittelt werden. Zur Orientierung gebe ich hier eine Auswahl von Standard-Lehrbüchern an.

Analysis

Forster, O.: *Analysis 1, 2.* Springer Spektrum, Wiesbaden ¹¹2012, ¹⁰2013. (Frühere Auflagen: Vieweg, Braunschweig.)

Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis. Teil 1.* Vieweg + Teubner, Wiesbaden ¹⁷2009. (Frühere Auflagen: B. G. Teubner, Stuttgart.)

Hildebrandt, S.: *Analysis 1, 2.* Springer, Berlin ²2006, 2003.

Königsberger, K.: *Analysis 1, 2.* Springer, Berlin ⁶2006, ⁵2006.

Rudin, W.: *Analysis.* Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München ⁴2009.

Lineare Algebra

Beutelspacher, A.: *Lineare Algebra: Eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen.* Springer Spektrum, Wiesbaden ⁸2014.

Bosch, S.: *Lineare Algebra.* Springer, Berlin ⁴2008.

Fischer, G.: *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger.* Springer Spektrum, Wiesbaden ¹⁸2014. (Frühere Auflagen: Vieweg, Braunschweig.)

Jänich, K.: *Lineare Algebra.* Springer, Berlin ¹¹2008.

Kowalsky, H.-J., Michler, G. O.: *Lineare Algebra.* de Gruyter, Berlin ¹²2003.

Lorenz, F.: *Lineare Algebra 1, 2.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg ⁴2003, ³1996.