

Stichwortverzeichnis

Alle Zahlenangaben beziehen sich auf Seitennummern, (Pr. $m.n$) verweist auf die Aufgabe n (im Kapitel m) auf der jeweils angegebenen Seite. Wir verwenden die Abkürzungen „CLT“ (Zentraler Grenzwertsatz), „SLLN/WLLN“ (starkes/schwaches Gesetz der großen Zahlen), „W-“ (Wahrscheinlichkeit/s-) und „ZV“ (Zufallsvariable).

Additionssatz

- für die Binomialverteilung, 52
- für die Gammaverteilung, 52
- für die Normalverteilung, 52
- für die Poissonverteilung, 52

Approximation

- der Binomialverteilung, 84
 - der Poissonverteilung, 76, 88 (Pr. 8.2)
- asymptotische Vernachlässigbarkeit, 140

Atom, 14, 22 (Pr. 2.19), 62 (Pr. 6.2)

Auswahl

- mit Zurücklegen, 12, 24, 25
- ohne Zurücklegen, 13, 24

ballot problem, 40 (Pr. 4.16)

Bayessche Formel, 33

bedingte Dichte, 157

bedingte Erwartung, 145

– L^2 -Projektion, 150

– $\mathbb{E}(X | Y = y)$, 155, 158

– abstrakt vs. klassisch, 146

– Beppo Levi, 149

– dominierte Konvergenz, 149

– Eigenschaften, 148

– Fatous Lemma, 149

– Gauß-ZV, 184

– Jensensche Ungleichung, 149

– Markovsche Ungleichung, 162 (Pr. 14.13)

– pull out, 150

– reguläre Version, 161

– testen am Erzeuger, 152

– tower property, 150

– Unabhängigkeit, 153

bedingte Verteilung, 158, 159

bedingte Wahrscheinlichkeit, 31, 145

– abstrakt vs. klassisch, 151

– Bayessche Formel, 33

– Kettenformel, 33

– totale Wahrscheinlichkeit, 33

Bernoulliverteilung, 8, 63

Bernstein-Polynome, 79

Bernsteinsche Ungleichung, 211 (Pr. 18.7)

Berry–Esseen Ungleichung, 85

Bertrands Paradox, 17–19

Bertrands Schubfachproblem, 40 (Pr. 4.14)

Binomialverteilung, 10

Blockbildung bei Unabhängigkeit, 44, 45, 59

Bonferronische Ungleichung, 30 (Pr. 3.16)

Borel–Cantelli Lemma, 93, 105, 116 (Pr. 10.4)

Buffon's needle problem, 19–20

Cauchy-Verteilung, 15, 65

– charakteristische Funktion, 65

Cesàros Lemma, 123

charakteristische Funktion, 63

– \iff positiv definit, 171

– analytisch, 180

– Cauchy-Verteilung, 65

– Eigenschaften, 66

– Eindeutigkeit, 68–69

– Momente einer ZV, 66, 67

– Normalverteilung, 64, 176

– periodisch, 164

– Stetigkeitssatz, 100, 163

– truncation inequality, 72

– Umkehrformel, 70, 74 (Pr. 7.15), 174 (Pr. 15.8)

– Unabhängigkeit, 69

– Verteilungskonvergenz, 100, 163

– Wachstum, 183

Chebyshevsche Ungleichung, 5, 213

CLT, *siehe* Zentraler Grenzwertsatz

Coupling, 76

coupon collector, 47–48, 54 (Pr. 5.20)

Cramér–Wold device, 102

d -Konvergenz, *siehe* Konvergenz von ZV

Dichte, 14

– Normalverteilung in \mathbb{R}^d , 176

– Normalverteilung in \mathbb{R} , 15, 64, 81

diskreter W-Raum, 7

Drei-Reihen Satz, 121

- Einschluss–Ausschluss Formel, 28–29,
30 (Pr. 3.17)
- Ereignis, 2, 6
- Ergebnis, 2, 6
- Ergebnisraum, 2, 6
- Erwartungswert, 4–6
- Etemadis Maximalungleichung, 117
- Experiment, 2, 6
- Exponentialverteilung, 15, 64
- Faltung, 51
- Feller-Bedingung, 137
- f.s. Konvergenz, *siehe* Konvergenz von ZV
- Gauß-, *siehe auch* Normal-
Gauß-ZV, 175
- Geburtstagsproblem, 21 (Pr. 2.5)
- Gegenbeispiel
- char. Funkt. auf $[-a, a]$, 174 (Pr. 15.10)
 - CLT ohne Varianz, 136
 - Faktorisierung char. Funkt., 200 (Pr. 17.6)
 - Funktionen unabhängiger ZV, 53 (Pr. 5.6)
 - Konvergenz von ZV, 95–96, 102
 - Lindeberg Bedingung, 144 (Pr. 13.10)
 - Produkt char. Fnen., 69–70, 73 (Pr. 7.3)
 - unabhängig \neq paarweise unabhängig, 42
 - unabhängig \neq unkorreliert, 50
 - Wachstum char. Funkt., 173 (Pr. 15.3)
- gemeinsame Verteilung, 45
- geometrische Verteilung, 10
- geometrische Wahrscheinlichkeit, 16
- Gesetz der großen Zahlen
- für Warteschlangen, 134 (Pr. 12.4)
 - schwach (WLLN), 78–80
 - stark (SLLN), 106, 123, 125, 128
 - Umkehrung des SLLN, 108, 127
- Gesetz der kleinen Zahlen, 76
- Gleichverteilung, 7, 14, 63
- Glivenko–Cantelli Lemma, 131
- große Abweichungen, 204, 207, 210
- Hewitt–Savage 0-1-Gesetz, 110
- hypergeometrische Verteilung, 13, 25
- Erwartung, Varianz, 22 (Pr. 2.13)
- Integralsinus, 74 (Pr. 7.14)
- Integralvergleichskriterium, 215
- Jensensche Ungleichung, 5, 213–214
- bedingte Erwartung, 149
- Kahnemann–Tversky Paradox, 34–35
- Kettenformel, 33
- klassische Probleme
- Bertrand’s ballot problem, 40 (Pr. 4.16)
 - Bertrands Paradox, 17–19
 - Bertrands Schubfachproblem, 40 (Pr. 4.14)
 - Buffon’s needle, 19–20
 - coupon collector, 47–48, 54 (Pr. 5.20)
 - Geburtstagsproblem, 21 (Pr. 2.5)
 - Kahnemann–Tversky Paradox, 34–35
 - normale Zahlen (Borel), 112–113
 - Pólya-Urne, 14
 - problème des parties (de Méré), 11
 - ruin problem, 38
 - secretary problem, 48–49
 - Simpsons Paradox, 39 (Pr. 4.7)
 - Würfelproblem von de Méré, 29 (Pr. 3.8)
 - Ziegenproblem, 36–38
 - Zwillingenproblem, 39 (Pr. 4.9)
- Kolmogorovsche Axiome, 2
- Kolmogorovsches 0-1-Gesetz, 109
- Kommissionsproblem, 26
- Kompaktheit von W-Maßen, 163
- Konfidenzintervall, 87
- Konvergenz von ZV
- Übersichtsschema, 92
 - fast sicher, 89, 104 (Pr. 9.6)
 - im p -ten Mittel, in L^p , 89
 - in Verteilung (d), 90, 97, 99, 100, 102
 - in Wahrscheinlichkeit (\mathbb{P}), 89
 - in Wahrscheinlichkeit (\mathbb{P}) ist metrisierbar, 103 (Pr. 9.5)
 - in Wahrscheinlichkeit (\mathbb{P}) ist vollständig, 103 (Pr. 9.3)
 - in Wahrscheinlichkeit (\mathbb{P}) Teilfolgenprinzip, 104 (Pr. 9.7)
 - schnelle stochastische Konv., 94
 - schwach, 90, 97, 99, 100, 102
 - stochastisch (\mathbb{P}), 89
 - Typerhaltung, 169
- Kovarianz, 52
- Kroneckers Lemma, 127
- Lévy Maß, 194
- Lévy Tripel, 194
- Lévy–Khintchin Formel, 194
- Laplacescher W-Raum, 7

- Legendre-Transformation, 202
 – Eigenschaften, 205
 Lemma
 – Borel–Cantelli, 93, 105, 116 (Pr. 10.4)
 – Cesàro, 123
 – Glivenko–Cantelli, 131
 – Kronecker, 127
 Lindeberg-Bedingung, 136
 lineare Modelle, 184
 Lotto, 25
 Lyapunov-Bedingung, 140
- Markov-Kern, 158, 161, 162 (Pr. 14.16)
 Markovsche Ungleichung, 5, 22 (Pr. 2.17), 213
 Minimax-Prinzip, 209
 Momente einer ZV, 66, 67
 momentenerzeugende Funktion (MGF), 202
 – Eigenschaften, 205, 211 (Pr. 18.1, 18.3)
 Monte-Carlo Integration, 128–130
 Multinomialkoeffizient, 26
- negative Binomialverteilung, 22 (Pr. 2.11)
 normale Zahl, 112
 Normalverteilung, 15
 – Additionssatz, 52
 – bivariat, 185 (Pr. 16.5)
 – Charakterisierung, 186 (Pr. 16.11)
 – charakteristische Funktion, 64
 – Faktorisierungssatz, 182
 – in \mathbb{R}^d , 176
 – Momente, 73 (Pr. 7.8, 7.9), 81
 – tail estimate, 186 (Pr. 16.12)
 – unabhängig = unkorreliert, 178
 Null–Eins Gesetz
 – von Hewitt–Savage, 110
 – von Kolmogorov, 109
- \mathbb{P} -Konvergenz, *siehe* Konvergenz von ZV
 Pólya-Urne, 14
 permutierbares Ereignis, 110
 Poisson-Approximation, 76, 88 (Pr. 8.2)
 Poissonverteilung, 63, 76
 positiv definit, 170
 problème des parties, 11
 pull out (bed. Erwartung), 150
- Rademacher-Funktionen, 54 (Pr. 5.19), 61, 96
 random walk, 88 (Pr. 7.4), 113
 reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit, 161
- Rekorde, 49–50
 Riemann–Lebesgue Lemma, 167
 ruin problem, 38
- Satz
 – L^1 -SLLN von Etemadi, 125
 – L^1 -SLLN von Kolmogorov, 128
 – L^2 -SLLN von Kolmogorov, 128
 – L^4 -SLLN, 106
 – CLT von de Moivre–Laplace, 80, 135
 – CLT von Lindeberg–Lévy, 136
 – Drei-Reihen Satz, 121
 – große Abweichungen, 204, 207, 210
 – von Bienaymé, 53
 – von Bochner, 171
 – von Chung–Fuchs, 114
 – von Cramér, 182
 – von Cramér–Chernoff, 204, 207
 – von Cramér–Wold, 102
 – von de Finetti, 193
 – von der Typenkonvergenz, 169
 – von Hadamard, 221
 – von Kac, 45, 69
 – von Lévy, 100, 118, 163
 – von Liouville, 221
 – von Marcinkiewicz, 183
 – von Plancherel, 74 (Pr. 7.12)
 – von Radon–Nikoým, 147
 – von Riemann–Lebesgue, 167
 – von Slutsky, 102, 104 (Pr. 9.9)
 – von Weierstraß, 79
 – WLLN, 78, 79
 secretary problem, 48–49
 Simpsons Paradox, 39 (Pr. 4.7)
 SLLN, *siehe* Gesetz der großen Zahlen
 Stetigkeitssatz von Lévy, 100, 163
 stochastische Konvergenz, 89
 Straffheit, 99, 163
 Summen unabhängiger ZV
 – \mathbb{P} -Konvergenz = d -Konvergenz, 122 (Pr. 11.4)
 – f.s. Konvergenz = \mathbb{P} -Konvergenz, 118
 – Konvergenzkriterium, 121
- tail probability, 71
 Teilungsproblem, 11
 terminales Ereignis, 108
 totale Wahrscheinlichkeit, 33
 tower property (bed. Erwartung), 150
 truncation inequality, 72

- Unabhängigkeit
 - Blocklemma, 44, 45, 59
 - Charakterisierung, 45, 69
 - Mengen, 41
 - Mengensysteme, 43
 - paarweise, 42
 - ZV, 43
- unbegrenzt teilbare ZV, 187
 - Beispiele, 188
 - Charakterisierung, 192
 - Konvergenz, 190
 - Lévy–Khintchin Formel, 194
 - zusammengesetzte Poisson-ZV, 193
- unendlicher Produktraum, 58
- unendliches Produkt von Maßen, 58
- Ungleichung
 - bedingte Jensen Ungl., 149
 - Bernstein, 211 (Pr. 18.7)
 - Berry–Esseen, 85
 - Bonferroni, 30 (Pr. 3.16)
 - Chebyshev, 5, 213
 - Etemadi, 117
 - Jensen, 5, 213–214
 - Kolmogorov, 122 (Pr. 11.1)
 - Markov, 5, 22 (Pr. 2.17), 162 (Pr. 14.13), 213
- unkorreliert, 50
- unterhalbstetig, 215
- Urnenmodell, 12–14

- Varianz, 52
- Verteilung, 4
 - Tabellen, 222–225
 - absolutstetig, 14
 - α -stabil, 200 (Pr. 17.11)
 - Ausläufer (tail), 71
 - diskret, 22 (Pr. 2.19)
 - gemeinsame, 45
 - singulär, 174 (Pr. 15.9)
 - stetig, 14, 22 (Pr. 2.19), 62 (Pr. 6.2), 174 (Pr. 15.9)
 - Summen unabh. ZV, 51
 - unbegrenzt teilbar, 187
 - unendliches Produkt, 58
 - von X/Y , 54 (Pr. 5.15)
 - von $X \cdot Y$, 73 (Pr. 7.5)
- Verteilungsfunktion, 14, 55, 56
 - empirisch, 131
 - Konvergenz, 97, 99, 132
 - multivariate, 218–220
 - tail estimates, 22 (Pr. 2.18)
 - verallg. Inverse, 55, 62 (Pr. 6.1)
- Verteilungskonvergenz, 90, 97, 99, 100, 102
 - Typerhaltung, 169

- W-Maß, W-Raum, 2
 - diskret, 7
 - Kompaktheit, 163
 - Laplace, 7
- Würfelproblem von de Méré, 29 (Pr. 3.8)
- Weierstraßscher Approximationssatz, 79
- WLLN, *siehe* Gesetz der großen Zahlen

- Zähldichte, 7
- Zentraler Grenzwertsatz (CLT), 135
 - de-Moivre–Laplace, 80, 135, 179
 - Dreiecksschema, 142–143
 - Feller, 137, 140
 - Lindeberg–Lévy, 136
 - Lyapunov, 140
 - Selbstnormalisierung, 144 (Pr. 13.7)
 - zufällige Summation, 144 (Pr. 13.4, 13.5)
- Ziegenproblem, 36–38
- zufällige Irrfahrt, 88 (Pr. 7.4), 113
- Zufallsvariable (ZV), 4
 - absolutstetig, 14, 167
 - diskret, 7, 167
 - Existenz, 55
 - gitterförmig, 164
 - Konstruktion unabh. ZV, 57, 60
 - normal(verteilt), 175
 - stetig, 14
 - Symmetrisierung, 62 (Pr. 6.6), 66, 74 (Pr. 7.10), 120
 - unbegrenzt teilbar, 187
- Zwillingsproblem, 39 (Pr. 4.9)
- Zylindermenge, 10, 58

Bezeichnungen

Allgemeines & Konventionen

MI Satz $n.m$	Verweis <i>Maß und Integral</i>
positiv	stets im Sinne ≥ 0
negativ	stets im Sinne ≤ 0
\mathbb{N}, \mathbb{N}_0	$1, 2, 3, \dots, \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\inf \emptyset$	$\inf \emptyset = +\infty$
$a \vee b$	Maximum von a und b
$a \wedge b$	Minimum von a und b
$\lfloor x \rfloor$	$\max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$
$\ x\ $	Euklidische Norm in \mathbb{R}^d , $\ x\ ^2 = x_1^2 + \dots + x_d^2$
$\langle x, y \rangle$	Skalarprodukt $\sum_{i=1}^d x_i y_i$
E, E_d	Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{d \times d}$

Mengen

$\#A, A $	Kardinalität der Menge A
\subset	Teilmenge (inkl. „=“)
\cup	Vereinigung paarweise disjunkter Mengen
A^c	Komplement der Menge A
\overline{A}	Abschluss der Menge A
$B_r(x)$	offene Kugel um x , Radius r
$A_n \uparrow A$	$A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$ & $A = \bigcup_n A_n$
$B_n \downarrow B$	$B_n \supset B_{n+1} \supset \dots$ & $B = \bigcap_n B_n$
$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$	$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq k} A_n$, 93, 105
$\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n$	$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq k} B_n$, 93, 105
$A \perp F$	A und F sind unabhängig, 41; (analog für Mengensysteme)
\mathcal{A}, \mathcal{F}	generische σ -Algebren
$\mathcal{A} \times \mathcal{F}$	$\{A \times F : A \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{F}\}$ „Rechtecke“
$\mathcal{A} \otimes \mathcal{F}$	Produkt- σ -Algebra
$\mathcal{B}(E)$	Borelmengen in E
$\mathcal{P}(E)$	Potenzmenge von E
$\sigma(\mathcal{G})$	erzeugte σ -Algebra MI S. 5
$\delta(\mathcal{G})$	erzeugtes Dynkin-System MI S. 14

Maße & Verteilungen

\mathbb{P}	W-Maß, 2
$\mathbb{P}_X, \mathbb{P}(X \in \bullet)$	Verteilung, 4
E	Erwartungswert, 4: $E = \int \dots d\mathbb{P}$
δ_x	Dirac-Maß in x
λ, λ^d	Lebesguemaß (in \mathbb{R}^d)
$\mu \otimes \nu$	Produkt von Maßen
$B(p)$	Bernoulli-Verteilung, 8, 222

$B(n, p)$	Binomialverteilung, 9, 222
$\text{Poi}(\lambda)$	Poissonverteilung, 63, 222
$\text{Exp}(\lambda)$	Exponentialverteilung, 64, 224
$N(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung, 15, 224
$N(m, C)$	– in \mathbb{R}^d , 176, 224
$U[a, b]$	Gleichverteilung, 14, , 222

Zufallsvariable & Funktionen

X, Y, Z	Zufallsvariable, 4
X^+	Positivteil: $X \vee 0$
X^-	Negativteil: $-(X \wedge 0)$
$\{X \in B\}$	$\{\omega : X(\omega) \in B\}$
$\{X \geq a\}$	$\{\omega : X(\omega) \geq a\}$ usw.
$X \perp Y$	X, Y sind unabhängig
$X \sim Y$	X ist wie Y verteilt
$X \sim \mu$	X hat Verteilung μ
$\mathbb{1}_A$	$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$
$\text{supp } u$	Träger $\overline{\{u \neq 0\}}$
$C(E)$	stetige Funktionen auf E
$C_b(E)$	beschränkte – –
$C_c(E)$	– – mit kompaktem Träger
$L^1, L^1(\mathbb{P})$	ZV mit $E X < \infty$, 5
L^p, L^∞	ZV mit $E[X ^p] < \infty$, 5
$L^p(\mathcal{F})$	betont die \mathcal{F} -Messbarkeit ($E[X ^p]^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$)
$\ X\ _{L^p}$	$\inf \{c > 0 : \mathbb{P}(X \geq c) = 0\}$
$\ X\ _{L^\infty}$	$\sup_x u(x) $

Abkürzungen

W–	Wahrscheinlichkeit(s)–
ZV	Zufallsvariable
CLT	zentraler Grenzwertsatz (central limit theorem)
SLLN	starkes Gesetz d. großen Zahlen (strong law of large numbers)
WLLN	schwaches Gesetz d. gr. Zahlen (weak law of large numbers)
iid	unabhängig und identisch verteilt (independent, identically distributed)
f.s.	fast sicher
\cap/\cup -stabil	Familie enthält endliche Schnitte/Vereinigungen
$\left[\frac{1}{2} \right]$	selbst rechnen!